

Zápočtové otázky z Teorie množin

Akademický rok 2024/2025

Úvod

Tento dokument obsahuje seznam otázek pro získání zápočtu z předmětu **Teorie množin**. Vlastnoruční vypracování těchto otázek je nutnou podmínkou pro přístup k ústní zkoušce.

Pokyny pro vypracování

- Každá otázka by měla být zodpovězena v plném rozsahu, včetně všech požadovaných definic, důkazů a příkladů.
- U důkazů uvádějte kompletní argumentaci, ne pouze náčrty.
- Příklady volte vhodně a ilustруйте jimi danou problematiku.
- Dbejte na přesnost matematického vyjadřování a korektní používání symboliky.
- Vypracování odevzdejte v tištěné podobě na začátku zkouškového období.

Obsah

1	Axiomy teorie množin a základní operace	2
2	Relace a funkce	4
3	Přirozená čísla a princip rekurze	5
4	Mohutnosti množin	6
5	Transfinitní indukce a rekurze	7
6	Axiom výběru a jeho ekvivalenty	8
7	Ordinální a kardinální čísla	9

1 Axiomy teorie množin a základní operace

Tato sekce ověřuje pochopení základních axiomů, na kterých je postavena celá teorie množin, a schopnost s nimi pracovat.

1.1 Axiom extenzionality

- (a) Formulujte axiom extenzionality a vysvětlete jeho význam pro definici rovnosti dvou množin.
- (b) Uveďte příklad dvou množin, které jsou definovány různým způsobem, ale jsou si rovny podle axiomu extenzionality. Použijte přitom množinu řešení nějaké rovnice.
- (c) Zdůvodněte, proč nezáleží na pořadí prvků v množině a proč násobné výskyty téhož prvku nemají význam.

1.2 Schéma axiomů vydělení

- (a) Formulujte schéma axiomů vydělení a vysvětlete, k čemu slouží.
- (b) Ukažte, jak pomocí tohoto schématu můžeme z množin A a B zkonstruovat jejich průnik $A \cap B$ a rozdíl $A \setminus B$.
- (c) Vysvětlete, proč schéma axiomů vydělení vyžaduje, aby množina A už existovala. Co by se stalo, kdybychom mohli psát přímo $\{x : \varphi(x)\}$ bez reference na již existující množinu?

1.3 Axiomy neuspořádané dvojice a sjednocení

- (a) Formulujte axiom neuspořádané dvojice a axiom sjednocení.
- (b) Podrobně popište, jak pomocí těchto dvou axiomů můžeme z množin A a B zkonstruovat jejich sjednocení $A \cup B$.
- (c) Uveďte konkrétní příklad pro množiny $A = \{1, 2\}$ a $B = \{2, 3, 4\}$ a ukažte postup konstrukce $A \cup B$.

1.4 Axiom potenční množiny

- (a) Formulujte axiom potenční množiny a vysvětlete, co tvrdí o třídě všech podmnožin dané množiny.
- (b) Vypočítejte $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\{a\})$ a $\mathcal{P}(\{a, b\})$.
- (c) Diskutujte vztah mezi mohutností množiny A a mohutností $\mathcal{P}(A)$. Kolik prvků má $\mathcal{P}(A)$, pokud $|A| = n$?

1.5 Axiom nekonečna

- (a) Formulujte axiom nekonečna a vysvětlete, jakou strukturu musí mít induktivní množina.
- (b) Uveďte příklad induktivní množiny (mimo množinu ω).
- (c) Vysvětlete, proč je axiom nekonečna nezbytný pro existenci přirozených čísel v teorii množin.

1.6 Vlastní třídy a Russellův paradox

- (a) Vysvětlete rozdíl mezi množinou a vlastní třídou.
- (b) Ukažte pomocí důkazu sporem, že třída všech množin $V = \{x \mid x = x\}$ je vlastní třída.
- (c) Popište Russellův paradox a vysvětlete, jak se mu teorie množin vyhýbá pomocí schématu axiomů vydělení.

1.7 Axiom regularity

- (a) Formulujte axiom regularity.
- (b) Dokažte, že z axiomu regularity plyne $A \notin A$ pro libovolnou množinu A .
- (c) Vysvětlete, proč axiom regularity zabráňuje existenci nekonečných klesajících řetězců tvaru $\cdots \in x_2 \in x_1 \in x_0$.

1.8 Základní množinové operace

- (a) Dokažte De Morganovy zákony pro množiny:

$$A \setminus \bigcup F = \bigcap \{A \setminus C : C \in F\},$$

$$A \setminus \bigcap F = \bigcup \{A \setminus C : C \in F\},$$

kde F je neprázdná množina množin.

- (b) Dokažte distributivní zákon: $A \cap (\bigcup F) = \bigcup \{A \cap C : C \in F\}$.

2 Relace a funkce

Tato sekce se zaměřuje na množinovou konstrukci uspořádaných dvojic, relací a funkcí.

2.1 Uspořádaná dvojice podle Kuratowského

- (a) Definujte uspořádanou dvojici $\langle x, y \rangle$ podle Kazimierze Kuratowského.
- (b) Dokažte podrobně vlastnost: $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$. Proveďte důkaz v obou případech: kdy $x = y$ a kdy $x \neq y$.
- (c) Definujte kartézský součin $A \times B$ a uveďte příklad pro $A = \{1, 2\}$ a $B = \{a, b\}$.

2.2 Binární relace

- (a) Definujte binární relaci a relaci na množině A .
- (b) Definujte definiční obor $\text{dom}(R)$, obor hodnot $\text{ran}(R)$ a pole relace $\text{fld}(R)$.
- (c) Pro relaci $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$ určete $\text{dom}(R)$, $\text{ran}(R)$ a $\text{fld}(R)$.

2.3 Funkce

- (a) Definujte funkci jako specifický typ binární relace a vysvětlete podmínku jednoznačnosti.
- (b) Vysvětlete notaci $F : A \rightarrow B$ a uveďte všechny podmínky, které musí funkce F splňovat.
- (c) Rozhodněte, zda následující relace jsou funkce:
 - $R_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\}$
 - $R_2 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, c \rangle\}$
 - $R_3 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 9 \rangle\}$

2.4 Operace s funkcemi

- (a) Definujte inverzi funkce F^{-1} , restrikci $F \upharpoonright A$ a složení funkcí $F \circ G$.
- (b) Za jakých podmínek je inverze F^{-1} funkcí?
- (c) Nechť $F = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, c \rangle\}$ a $G = \{\langle a, x \rangle, \langle b, y \rangle, \langle c, x \rangle\}$. Určete F^{-1} , $F \upharpoonright \{1, 2\}$ a $G \circ F$.

2.5 Typy funkcí

- (a) Definujte prostou funkci (injekci), zobrazení na (surjekci) a bijekci. Uveďte u každé formální definici pomocí kvantifikátorů.
- (b) Pro funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem $f(x) = x^2$ rozhodněte, zda je injektivní a surjektivní.
- (c) Uveďte příklad bijekce mezi množinami $\{1, 2, 3\}$ a $\{a, b, c\}$.

2.6 Relace uspořádání

- (a) Definujte částečné uspořádání a uveďte tři podmínky, které musí splňovat.
- (b) Vysvětlete rozdíl mezi částečným uspořádáním a striktním částečným uspořádáním.
- (c) Definujte úplné (lineární) uspořádání a uveďte příklady množin s úplným a pouze částečným uspořádáním.

3 Přirozená čísla a princip rekurze

Tato sekce ověřuje pochopení konstrukce přirozených čísel v teorii množin a principů indukce a rekurze.

3.1 Konstrukce přirozených čísel

- (a) Definujte následovníka množiny x^+ a explicitně zkonstruujte množiny reprezentující čísla 0, 1, 2, 3, 4.
- (b) Vysvětlete, jak tato konstrukce vede k tomu, že každé přirozené číslo n je množina obsahující právě n prvků.
- (c) Ukažte, že $3 \in 5$ a $\{0, 1\} \subseteq 3$.

3.2 Induktivní množiny a ω

- (a) Definujte induktivní množinu a vysvětlete roli axiomu nekonečna.
- (b) Definujte množinu přirozených čísel ω jako průnik všech induktivních množin.
- (c) Dokažte, že ω je nejmenší induktivní množinou, tj. je sama induktivní a je obsažena v každé induktivní množině.

3.3 Princip matematické indukce

- (a) Formulujte princip matematické indukce a zdůvodněte, jak je odvozen z definice množiny ω .
- (b) Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna $n \in \omega$ platí:

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- (c) Vysvětlete, proč lze matematickou indukcí dokazovat pouze tvrzení o přirozených číslech, nikoliv o jiných nekonečných množinách.

3.4 Tranzitivita přirozených čísel

- (a) Definujte tranzitivní množinu.
- (b) Dokažte matematickou indukcí, že každé přirozené číslo $n \in \omega$ je tranzitivní množinou.
- (c) Uveďte příklad množiny, která není tranzitivní.

3.5 Princip rekurze

- (a) Formulujte větu o jednoduché rekurzi na ω .
- (b) Formulujte větu o obecné rekurzi na ω a vysvětlete rozdíl mezi těmito dvěma verzemi.
- (c) Ukažte, jak lze pomocí principu obecné rekurze definovat Fibonacciho posloupnost. Vysvětlete, proč jednoduchá rekurze nestačí.

3.6 Peanovy axiomy

- (a) Uveďte Peanovy axiomy pro systém $\langle N, S, e \rangle$.
- (b) Ověřte, že uspořádaná trojice $\langle \omega, \sigma, 0 \rangle$, kde $\sigma(n) = n^+$, tvoří Peanův systém.
- (c) Vysvětlete vztah mezi axiomatickým přístupem (Peano) a konstrukcí v teorii množin (von Neumann).

3.7 Ordinální aritmetika

- (a) Definujte rekurzivně sčítání a násobení na množině ω .
- (b) Dokažte indukcí asociativní zákon pro sčítání: $(m + n) + p = m + (n + p)$.
- (c) Ukažte na příkladu, že násobení není obecně komutativní v ordinální aritmetice (na ω ano, ale na větších ordinálech ne).

4 Mohutnosti množin

Tato sekce ověřuje pochopení konceptu mohutnosti a Cantorovy teorie nekonečných množin.

4.1 Konečné a spočetné množiny

- (a) Definujte konečnou množinu a nekonečnou spočetnou množinu.
- (b) Uveďte tři příklady nekonečných spočetných množin a zdůvodněte, proč jsou spočetné.
- (c) Dokažte, že množina celých čísel $\mathbb{Z}$ je spočetná konstrukcí explicitní bijekce $f : \omega \rightarrow \mathbb{Z}$.

4.2 Dirichletův zásuvkový princip

- (a) Formulujte Dirichletův zásuvkový princip pro konečné množiny.
- (b) Dokažte, že neexistuje prostá funkce $f : 5 \rightarrow 3$ (použijte konkrétní množiny $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a $3 = \{0, 1, 2\}$).
- (c) Vyvoďte z Dirichletova principu, že každá funkce $f : \omega \rightarrow A$, kde A je konečná množina, nemůže být prostá.

4.3 Ekvipotence množin

- (a) Definujte, kdy jsou dvě množiny ekvipotentní.
- (b) Dokažte, že množiny ω a $\mathbb{Z}$ jsou ekvipotentní zkonstruováním explicitní bijekce.
- (c) Dokažte, že množina sudých přirozených čísel je ekvipotentní s ω .

4.4 Nespočetné množiny

- (a) Definujte nespočetnou množinu.
- (b) Načrtněte Cantorův diagonální argument pro důkaz, že množina všech binárních posloupností $F = \{f : \omega \rightarrow \{0, 1\}\}$ je nespočetná.
- (c) Vysvětlete, proč je množina reálných čísel $\mathbb{R}$ nespočetná (můžete použít bijekci mezi $(0, 1)$ a binárními posloupnostmi).

4.5 Cantorova věta

- (a) Formulujte Cantorovu větu o mohutnosti potenční množiny.
- (b) Proveďte kompletní důkaz Cantorovy věty, včetně konstrukce diagonální množiny $D = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$.
- (c) Diskutujte důsledky Cantorovy věty: existuje nekonečná hierarchie stále větších nekonečných mohutností.

4.6 Cantor-Bernstein-Schröderova věta

- (a) Formulujte Cantor-Bernstein-Schröderovu větu.
- (b) Vysvětlete, proč je tato věta důležitá pro porovnávání mohutností množin.
- (c) Použijte CBS větu k důkazu, že množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ má stejnou mohutnost jako ω (stačí načrtnout existenci injektivních zobrazení v obou směrech).

4.7 Hypotéza kontinua

- (a) Formulujte hypotézu kontinua.
- (b) Vysvětlete status hypotézy kontinua vzhledem k axiomům ZFC (zmínka o pracích Gödela a Cohena).
- (c) Diskutujte filozofické důsledky nezávislosti hypotézy kontinua na axiomech ZFC.

5 Transfinitní indukce a rekurze

Tato sekce se zaměřuje na zobecnění principů indukce a rekurze na dobře uspořádané množiny.

5.1 Dobré uspořádání

- (a) Definujte dobré uspořádání a vysvětlete, v čem se liší od úplného uspořádání.
- (b) Uveďte příklad množiny, která je úplně uspořádána, ale není dobře uspořádána.
- (c) Dokažte, že každá konečná úplně uspořádaná množina je dobře uspořádána.

5.2 Princip transfinitní indukce

- (a) Formulujte větu o principu transfinitní indukce pro dobře uspořádanou množinu $(W, \preceq)$.
- (b) Proveďte důkaz věty o transfinitní indukci (sporem).
- (c) Vysvětlete, jak je standardní matematická indukce speciálním případem transfinitní indukce.

5.3 Princip transfinitní rekurze

- (a) Formulujte větu o principu transfinitní rekurze.
- (b) Vysvětlete, jak tato věta umožňuje definovat funkce na libovolné dobře uspořádané množině.
- (c) Porovnejte transfinitní rekursi s principem rekurze na ω .

5.4 Aplikace transfinitní rekurze

- (a) Vysvětlete, jak lze pomocí principu transfinitní rekurze a axiomu výběru dokázat, že pro každou nekonečnou množinu A existuje prostá funkce $h : \omega \rightarrow A$.
- (b) Zdůvodněte, proč je v tomto důkazu nutný axiom výběru.
- (c) Formulujte důsledek o Dedekindově definici nekonečné množiny.

5.5 Dedekindova charakterizace nekonečnosti

- (a) Formulujte Dedekindovu definici nekonečné množiny.
- (b) Dokažte, že množina je nekonečná právě tehdy, když existuje prostá, ale ne surjektivní funkce $f : A \rightarrow A$.
- (c) Uveďte konkrétní příklad takové funkce pro množinu ω .

6 Axiom výběru a jeho ekvivalenty

Tato sekce se zabývá axiomem výběru a jeho různými formulacemi.

6.1 Axiom výběru

- (a) Formulujte axiom výběru (AC) neformálně i formálně.
- (b) Vysvětlete ekvivalenci axiomu výběru s tvrzením o neprázdnoti kartézského součinu neprázdných množin.
- (c) Uveďte příklad situace, kde je axiom výběru intuitivně přijatelný, a příklad, kde může působit kontraintuitivně.

6.2 Zornovo lemma

- (a) Definujte pojmy: částečně uspořádaná množina, řetězec, horní mez, maximální prvek.
- (b) Formulujte Zornovo lemma.
- (c) Vysvětlete intuitivní význam Zornova lemmatu: "pokud lze každý řetězec ohraničit shora, existuje maximální prvek".

6.3 Princip dobrého uspořádání

- (a) Formulujte princip dobrého uspořádání (Zermelovu větu).
- (b) Vysvětlete, proč je tento princip pro množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ neintuitivní.
- (c) Diskutujte, proč nemůžeme explicitně popsat dobré uspořádání množiny $\mathbb{R}$.

6.4 Ekvivalence AC, ZL a WOP

- (a) Formulujte vztah mezi axiomem výběru (AC), Zornovým lemmatem (ZL) a principem dobrého uspořádání (WOP).
- (b) Načrtněte myšlenku důkazu jedné z implikací (např. $AC \Rightarrow ZL$ nebo $ZL \Rightarrow WOP$).
- (c) Vysvětlete historický kontext: nezávislost AC na axiomech ZF (práce Gödela a Cohen).

6.5 Aplikace Zornova lemmatu

- (a) Načrtněte důkaz věty, že každý vektorový prostor má bázi, s použitím Zornova lemmatu.
- (b) Definujte částečně uspořádanou množinu, kterou v tomto důkazu uvažujeme.
- (c) Ověřte, že tato množina splňuje předpoklady Zornova lemmatu.

6.6 Banach-Tarského paradox

- (a) Popište tvrzení Banach-Tarského paradoxu.
- (b) Vysvětlete, jakou roli hraje axiom výběru v jeho důkazu.
- (c) Zdůvodněte, proč tento paradox není v rozporu s fyzikální realitou ani s matematikou samotnou.

7 Ordinální a kardinální čísla

Tato závěrečná sekce se věnuje transfinitním číslům a jejich aritmetice.

7.1 Ordinální čísla

- (a) Definujte ordinální číslo jako tranzitivní množinu dobře uspořádanou relací $\in$.
- (b) Ověřte, že množiny $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$ a $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ splňují definici ordinálního čísla.
- (c) Vysvětlete, jak von Neumannova konstrukce spojuje ordinály s přirozenými čísly.

7.2 Typy ordinálů

- (a) Definujte následnický ordinál a limitní ordinál.
- (b) Uveďte příklady následnických ordinálů (např. 3, 5) a limitních ordinálů (např. ω , $\omega + \omega$).
- (c) Dokažte, že ω je limitní ordinál.

7.3 Vlastnosti ordinálů

- (a) Dokažte, že každý prvek ordinálu je ordinál.
- (b) Formulujte a zdůvodněte zákon trichotomie pro ordinály.
- (c) Vysvětlete, proč relace $\in$ na třídě všech ordinálů tvoří dobré uspořádání.

7.4 Kardinální čísla

- (a) Definujte kardinální číslo podle von Neumanna.
- (b) Vysvětlete, proč je ω kardinální číslo.
- (c) Popište vztah mezi symbolem $\aleph_0$ a množinou ω .

7.5 Vlastnosti kardinálů

- (a) Dokažte, že každý nekonečný kardinál musí být limitní ordinál.
- (b) Vysvětlete rozdíl mezi ordinální a kardinální aritmetikou.
- (c) Proč platí $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ v kardinální aritmetice?

7.6 Kardinální aritmetika

- (a) Definujte sčítání a násobení kardinálních čísel.
- (b) Definujte 2^κ a vysvětlete jeho vztah k potenční množině.
- (c) Dokažte, že $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ (použijte Cantorovu větu).

7.7 Hierarchie nekonečen

- (a) Popište hierarchii kardinálních čísel: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$
- (b) Vysvětlete, co je $\aleph_1$ a jak se liší od $\omega + 1$.
- (c) Diskutujte vztah mezi $2^{\aleph_0}$ a $\aleph_1$ v kontextu hypotézy kontinua.

Závěrečné poznámky

Doporučená literatura

- Balcar, B., Štěpánek, P.: *Teorie množin*. Academia, Praha, 1986.

Hodnocení

Zápočet bude udělen při vypracování všech otázek s dostatečnou kvalitou a přesností. Při hodnocení se bude klást důraz na:

- Přesnost definic a formulací
- Úplnost a správnost důkazů
- Vhodnost a správnost příkladů
- Jasnost a srozumitelnost výkladu
- Schopnost propojit jednotlivé koncepty

Hodně úspěchů při vypracování!