

Kardinální čísla

Pojem kardinálního čísla

Nyní uvedme definici kardinálního čísla, jak tento pojem definoval John von Neumann.

Definice. Kardinální číslo nebo **kardinál** je ordinální číslo κ takové, že pro každé ordinální číslo $\beta \in \kappa$ neexistuje prostá funkce $f : \kappa \rightarrow \beta$.

Věta 1. Každé přirozené číslo n je kardinální číslo. Ordinální číslo ω je kardinální číslo. Každý nekonečný kardinál je limitní ordinální číslo.

Důkaz Věty 1.

1. Každé přirozené číslo n je kardinální číslo.

- Přirozená čísla n jsou konečné ordinály, $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Máme ukázat, že pro $\beta \in n$ (tedy $\beta < n$) neexistuje prostá funkce $f : n \rightarrow \beta$.
- Množina n má n prvků a množina β má β prvků. Protože $\beta < n$, podle Dirichletova principu (pro konečné množiny) nemůže existovat prosté zobrazení z n -prvkové množiny do β -prvkové množiny.
- Tedy n je kardinální číslo.

2. Ordinální číslo ω je kardinální číslo.

- Máme ukázat, že pro každé $\beta \in \omega$ (tedy β je přirozené číslo) neexistuje prostá funkce $f : \omega \rightarrow \beta$.

Kdyby naopak existovala prostá funkce $f : \omega \rightarrow \beta$, pak by podle důsledku Dirichletova principu musela být množina β nekonečná, což je spor s tím, že β je přirozené číslo a tedy je konečnou množinou.

3. Každý nekonečný kardinál je limitní ordinální číslo.

- Nechť κ je nekonečný kardinál. Předpokládejme sporem, že κ není limitní ordinál.
- Pak κ musí být následnický ordinál (nemůže být 0, protože je nekonečný). Tedy $\kappa = \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ pro nějaký ordinál α .
- Protože κ je nekonečný, musí být i α nekonečný.
- Chceme ukázat, že pro nekonečný ordinál α existuje bijekce (a tedy i prostá funkce) $g : \alpha + 1 \rightarrow \alpha$. Připomeňme, že $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.
- Protože α je nekonečný ordinál, obsahuje $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ jako podmnožinu (dokonce jako počáteční úsek).
- Zkonstruujeme bijekci $g : \alpha \cup \{\alpha\} \rightarrow \alpha$ inspirovanou Hilbertovým hotelem:

- Prvek α (který je v $\alpha + 1$, ale ne v α) zobrazíme na $0 \in \alpha$.
- Každý prvek $n \in \omega \subseteq \alpha$ zobrazíme na $n + 1 \in \alpha$.
- Všechny ostatní prvky $\beta \in \alpha \setminus \omega$ (tj. ordinály v α , které nejsou přirozenými čísly) zobrazíme na sebe.
- Formálně definujeme $g : \alpha \cup \{\alpha\} \rightarrow \alpha$ takto:
 - $g(\alpha) = 0$
 - $g(n) = n + 1$ pro $n \in \omega$
 - $g(\beta) = \beta$ pro $\beta \in \alpha \setminus \omega$
- Ověříme, že g je injektivní:
 - **Prostá (injektivní):** Necht' $x, y \in \alpha \cup \{\alpha\}$ a $g(x) = g(y)$.
 - Pokud $g(x) = 0$, pak z definice g plyne, že x musí být α . Tedy $x = y = \alpha$.
 - Pokud $g(x) = k + 1$ pro nějaké $k \in \omega$, pak z definice g plyne, že x musí být k . Tedy $x = y = k$.
 - Pokud $g(x) = \beta$ pro nějaké $\beta \in \alpha \setminus \omega$ (tedy β není přirozené číslo a $\beta \neq 0$), pak z definice g plyne, že x musí být β . Tedy $x = y = \beta$.
 - Ve všech případech platí $x = y$, takže g je prostá.
- Ukázali jsme, že existuje prostá funkce $g : \alpha + 1 \rightarrow \alpha$.
- Tedy pro nekonečný ordinál α existuje prostá funkce $g : \kappa \rightarrow \alpha$, kde $\kappa = \alpha + 1$.
- Protože $\alpha \in \kappa$, existence prosté funkce $g : \kappa \rightarrow \alpha$ je ve sporu s definicí kardinálního čísla κ (která říká, že pro žádné $\beta \in \kappa$ nesmí existovat prostá funkce $f : \kappa \rightarrow \beta$).
- Náš předpoklad, že κ je následnický ordinál, byl tedy chybný.
- Proto každý nekonečný kardinál κ musí být limitní ordinál.

Tím je důkaz dokončen. ■

Pojem kardinality množiny

Definice. Je-li A množina, pak symbol $|A|$ značí nejmenší ordinální číslo κ , pro které existuje prostá funkce $f : A \rightarrow \kappa$. Ordinální číslo $|A|$ nazýváme **kardinálním číslem (kardinalitou)** množiny A .

Lemma 1. Necht' A je množina.

- (a) Existuje alespoň jedno ordinální číslo α pro nějž existuje prostá funkce $f : A \rightarrow \alpha$.
- (b) Kardinalita $|A|$ množiny A je jednoznačně určena.
- (c) $|A|$ je kardinální číslo.
- (d) Pro každé množiny A a B platí:

- $|A| = |B|$ právě tehdy, když $|A| =_c |B|$, tj. existuje bijekce mezi množinami A a B .
- $|A| \subseteq |B|$ právě tehdy, když $|A| \leq_c |B|$.
- $|A| \in |B|$ právě tehdy, když $|A| <_c |B|$.

Definice. Je-li A nekonečná spočetná množina, pak kardinální číslo $|A|$ označíme symbolem $\aleph_0$ (aleph nula).

Věta 2. $\aleph_0 = \omega$ (nejmenší nekonečné ordinální číslo).

Definice. Symbol $\aleph_1$ označuje kardinální číslo, které je nejmenší nekonečné kardinální číslo větší než $\aleph_0$.

Definice. Je-li κ kardinální číslo, pak 2^κ je kardinální číslo, které je kardinalitou množiny $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{P}(\kappa \times \{0, 1\}) : f : \kappa \rightarrow \{0, 1\}\}$, tj. množiny všech funkcí zobrazujících κ do $\{0, 1\}$. Tj.

$$2^\kappa := |\mathcal{F}|.$$

Věta 3. Pro každé kardinální číslo κ platí:

$$2^\kappa = |\mathcal{P}(\kappa)|.$$

HYPOTÉZA KONTINUA.

$$\boxed{2^{\aleph_0} = \aleph_1.}$$

Kardinální aritmetika

Definice. Necht' λ a κ jsou kardinální čísla. Pak **kardinální součet** $\delta + \kappa$ a **kardinální součin** $\delta \cdot \kappa$ jsou definovány takto:

$$\delta + \kappa := |(\{0\} \times \delta) \cup (\{1\} \times \kappa)|,$$

$$\delta \cdot \kappa := |\delta \times \kappa|.$$