

Ordinální čísla: Úvod

Co jsou ordinální čísla?

Intuitivně si ordinální čísla můžeme představit jako "typy" dobře uspořádaných množin. Formálněji, v Zermelo-Fraenkelově teorii množin (ZF), definujeme ordinální číslo jako **tranzitivní množinu, která je dobře uspořádaná relací náležení ($\in$)**.

- **Tranzitivní množina:** Množina A je tranzitivní, pokud každý prvek jejího prvku je také prvkem A . Tedy, pokud $x \in y$ a $y \in A$, pak $x \in A$.
- **Dobře uspořádaná relací $\in$:** Každá neprázdna podmnožina ordinálu má nejmenší prvek vzhledem k relaci $\in$.

Základní příklady

- **0:** Prázdná množina $\emptyset$ je nejmenší ordinál.
- **1:** Množina $\{\emptyset\}$ neboli $\{0\}$.
- **2:** Množina $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ neboli $\{0, 1\}$.
- **n:** Obecně, konečný ordinál n je množina $\{0, 1, \dots, n-1\}$.
- **ω (omega):** Množina všech konečných ordinálů $\{0, 1, 2, \dots\}$. Toto je nejmenší nekonečný ordinál.

Klíčové vlastnosti

1. **Každý prvek ordinálu je ordinál:** Pokud α je ordinál a $\beta \in \alpha$, pak β je také ordinál.
2. **Relace $\in$ je striktní uspořádání na ordinálech:** Pro libovolné ordinály α, β platí právě jedna z možností:
 - $\alpha \in \beta$ (což značíme $\alpha < \beta$)
 - $\alpha = \beta$
 - $\beta \in \alpha$ (což značíme $\beta < \alpha$)
3. **Každá množina ordinálů je dobře uspořádaná relací $\in$.**
4. **Neexistuje množina všech ordinálů (Burali-Fortiho paradox).**

Typy ordinálů

- **Nulový ordinál:** $0 = \emptyset$.
- **Následnický ordinál:** Ordinál tvaru $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ pro nějaký ordinál α . Například $1 = 0 + 1$, $2 = 1 + 1$, $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$.
- **Limitní ordinál:** Nenulový ordinál, který není následnický. Je to sjednocení všech menších ordinálů. Nejmenším limitním ordinálem je ω . Další příklady jsou $\omega + \omega$,

$$\omega * \omega, \varepsilon_0.$$

- **Co znamená sčítání ordinálů?** Součet $\alpha + \beta$ intuitivně znamená "umístit dobře uspořádanou množinu typu β za dobře uspořádanou množinu typu α ". Formálně se definuje transfinite rekursí:

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ (tj. $(\alpha + \beta) \cup \{\alpha + \beta\}$)
- Pokud δ je limitní ordinál, pak

$$\alpha + \delta = \sup\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \delta\} = \bigcup_{\gamma < \delta} (\alpha + \gamma).$$

- **Náznak důkazu, proč je $\omega + \omega$ limitní:**

1. **Definice:** Podle rekursivní definice pro limitní ordinál ω , platí $\omega + \omega = \sup\{\omega + n \mid n < \omega\}$. Tedy $\omega + \omega = \{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots\}$.
2. **Není nula:** Zjevně $\omega + \omega \neq 0 = \emptyset$.
3. **Není následník:** Předpokládejme pro spor, že $\omega + \omega = \gamma + 1$ pro nějaký ordinál γ . Následnický ordinál $\gamma + 1 = \gamma \cup \{\gamma\}$ má vždy největší prvek, kterým je γ . Avšak množina $\omega + \omega = \{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots\}$ nemá největší prvek (pro libovolné $\omega + n \in \omega + \omega$ je $\omega + (n + 1)$ také prvkem a $\omega + n < \omega + (n + 1)$). Proto $\omega + \omega$ nemůže být následnický ordinál.
4. **Závěr:** Jelikož $\omega + \omega$ není nula ani následnický ordinál, musí být podle definice limitním ordinálem.

Transfinite indukce a rekurse

Dobré uspořádání ordinálů umožňuje používat princip **transfinite indukce** pro důkazy a **transfinite rekursi** pro definice funkcí na ordinálech.

Význam

Ordinální čísla jsou fundamentálním nástrojem v teorii množin. Používají se k:

- Měření "délky" dobře uspořádaných množin.
- Konstrukci hierarchií množin (např. von Neumannova hierarchie).
- Definování kardinálních čísel (jako speciálních ordinálů).