Axiom výběru (AC - Axiom of Choice)

Axiom výběru je jedním ze základních axiomů teorie množin, konkrétně v systému Zermelo-Fraenkelovy teorie množin s axiomem výběru (ZFC).

Znění axiomu

Neformálně řečeno, axiom výběru tvrdí:

> Pro *jakoukoliv* kolekci neprázdných množin existuje "výběrová funkce", která z každé množiny v této kolekci vybere právě jeden prvek.

Formálněji:

> Nechť $\mathcal{C}$ je kolekce neprázdných množin. Pak existuje funkce $f : \mathcal{C} \to \bigcup_{S \in \mathcal{C}} S$ taková, že pro každou množinu $S \in \mathcal{C}$ platí $f(S) \in S$.

Význam a důsledky

- **Nekonstruktivní povaha:** Axiom zaručuje *existenci* výběrové funkce, ale neříká, jak ji *zkonstruovat*. To je zdroj kontroverzí, zejména při práci s nekonečnými kolekcemi množin.
- **Ekvivalentní tvrzení:** Axiom výběru je ekvivalentní mnoha dalším důležitým matematickým principům, jako jsou:
  - **Princip dobrého uspořádání:** Každou množinu lze dobře uspořádat (tj. zavést na ní uspořádání, ve kterém má každá neprázdná podmnožina nejmenší prvek).
  - **Zornovo lemma:** Pokud v částečně uspořádané množině má každý řetězec (lineárně uspořádaná podmnožina) horní závoru, pak množina obsahuje alespoň jeden maximální prvek.
- **Použití:** Axiom výběru (nebo jeho ekvivalenty) je nezbytný pro důkaz mnoha klíčových vět v různých oblastech matematiky, například:
  - Každý vektorový prostor má bázi.
  - Tichonovova věta v topologii.
  - Hahn-Banachova věta ve funkcionální analýze.
  - **Existence ultrafiltrů:** Ultrafiltr na množině X je speciální typ kolekce podmnožin X. Formálně, filtr $\mathcal{F}$ na X je ultrafiltr, pokud je maximální (nelze ho rozšířit na větší filtr) nebo ekvivalentně, pro každou podmnožinu $A \subseteq X$ platí buď $A \in \mathcal{F}$ nebo $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Poznámka: *Filtrem $\mathcal{F}$ na množině X* rozumíme neprázdnou kolekci podmnožin X, která splňuje následující podmínky:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ (Filtr neobsahuje prázdnou množinu).
2. Pokud $A \in \mathcal{F}$ a $B \in \mathcal{F}$, pak $A \cap B \in \mathcal{F}$ (Filtr je uzavřený na konečné průniky).

3. Pokud $A \in \mathcal{F}$ a $A \subseteq B \subseteq X$, pak $B \in \mathcal{F}$ (Filtr je uzavřený nahoru, tj. obsahuje všechny nadmnožiny svých prvků v rámci X).

Shrnutí

Ačkoliv může působit intuitivně (pro konečné kolekce je zřejmý), jeho přijetí pro nekonečné kolekce má hluboké a někdy i neintuitivní důsledky. Většina moderních matematiků axiom výběru přijímá jako součást standardního rámce ZFC, protože umožňuje dokázat mnoho užitečných a důležitých výsledků.

Historická poznámka

Axiom explicitně formuloval Ernst Zermelo v roce 1904, aby dokázal princip dobrého uspořádání (že každou množinu lze dobře uspořádat). Jeho nekonstruktivní povaha a použití pro nekonečné množiny vyvolaly od počátku značné debaty a kontroverze mezi matematiky a logiky. Přesto se stal standardní součástí axiomatické teorie množin (ZFC).