

Transfinitní rekurze

Pojem dobrého uspořádání

Definice: Relace $\preceq$ je **dobrým uspořádáním** na množině A , pokud je úplným uspořádáním množiny A a každá neprázdna podmnožina množiny A má nejmenší prvek vzhledem k relaci R . To znamená, že pro každou neprázdnu podmnožinu $S \subseteq A$ existuje prvek $b \in S$, takový že pro každé $x \in S$ platí $b \preceq x$.

Příklad 1. Množina ω s relací $\leq$ je dobrým uspořádáním, protože každá neprázdna podmnožina ω má nejmenší prvek.

Příklad 2. Množina $\mathbb{R}$ s relací $\leq$ není dobrým uspořádáním, protože existují neprázdne podmnožiny, které nemají nejmenší prvek (např. interval $(0, 1)$).

Definice. Necht' $(W, \preceq)$ je dobře uspořádaná množina a $u \in W$. Pak **striktním iniciálním segmentem** množiny W vzhledem k relaci $\preceq$ rozumíme množinu

$$s(u) = \{x \in W : x \preceq u \wedge x \neq u\}.$$

Princip transfinitní indukce

Věta 1 (Princip transfinitní indukce). Necht' $(W, \preceq)$ je dobře uspořádaná množina. Necht' $A \subseteq W$ je podmnožina pro kterou platí:

$$\forall u \in W ((s(u) \subseteq A) \Rightarrow (u \in A)). \quad (1)$$

Pak platí $A = W$.

Důkaz. Předpokládejme, že $A \subseteq W$ splňuje podmínku (1). Dále sporem předpokládejme, že množina $W \setminus A$ je neprázdna. Podle předpokladu v množině $W \setminus A$ existuje nejmenší prvek u . Potom zřejmě $s(u) \subseteq A$. Z podmínky (1) tedy vyplývá, že $u \in A$. To je v rozporu s předpokladem, že u je nejmenší prvek množiny $W \setminus A$. Tedy $W \setminus A$ je prázdná a tedy $A = W$. ■

Princip transfinitní rekurze

Nejdříve si připomeňme "Princip rekurze" pro množinu ω . Věta zní takto: *Necht' A je množina, $f : A \rightarrow A$ je funkce a $a \in A$. Pak existuje právě jedna funkce $h : \omega \rightarrow A$, která splňuje podmínky: (i) $h(0) = a$ a (ii) $(\forall n \in \omega)(h(n^+) = f(h(n)))$.*

Tuto větu lze modifikovat následujícím způsobem.

Věta 2 (Princip rekurze II). Necht' A je množina a

$${}^{\omega}A = \{p : \text{pro jisté } n \in \omega \text{ je } p : n \rightarrow A\}.$$

Nechť $f : {}^{\omega}A \rightarrow A$ je funkce a $a \in A$. Pak existuje právě jedna funkce $h : \omega \rightarrow A$, která splňuje podmínky:

(i) $h(0) = a$

a

(ii) $(\forall n \in \omega)(h(n^+) = f(h \upharpoonright n))$.

Důkaz. Existence: Definujme množinu S jako množinu všech uspořádaných dvojic $\langle n, p \rangle$, kde $n \in \omega$ a $p : n^+ \rightarrow A$ je funkce splňující:

- $p(0) = a$
- Pro každé $k \in n$ platí $p(k^+) = f(p \upharpoonright k)$

Ukážeme, že pro každé $n \in \omega$ existuje právě jedna funkce $p : n^+ \rightarrow A$ taková, že $\langle n, p \rangle \in S$.

Indukcí podle n :

- Pro $n = 0$: Definujeme $p(0) = a$. Pak $\langle 0, p \rangle \in S$.
- Předpokládejme, že pro n existuje jediná funkce $p_n : n^+ \rightarrow A$ s $\langle n, p_n \rangle \in S$. Pro n^+ definujeme $p_{n^+} : (n^+)^+ \rightarrow A$ tak, že $p_{n^+} \upharpoonright n^+ = p_n$ a $p_{n^+}(n^+) = f(p_n)$. Pak $\langle n^+, p_{n^+} \rangle \in S$.

Nyní definujeme $h : \omega \rightarrow A$ tak, že $h(n) = p_n(n)$, kde p_n je jediná funkce s $\langle n, p_n \rangle \in S$. Tato funkce splňuje požadované podmínky.

Jednoznačnost: Nechť $h_1, h_2 : \omega \rightarrow A$ jsou dvě funkce splňující podmínky (i) a (ii).

Indukcí ukážeme, že $h_1(n) = h_2(n)$ pro všechna $n \in \omega$:

- $h_1(0) = a = h_2(0)$
- Předpokládejme $h_1 \upharpoonright n = h_2 \upharpoonright n$. Pak $h_1(n^+) = f(h_1 \upharpoonright n) = f(h_2 \upharpoonright n) = h_2(n^+)$.

Tedy $h_1 = h_2$. ■

Příklad 3. Ukážeme, jak lze předchozí větu aplikovat na důkaz existence tzv. Fibonacciho posloupnosti.

Definujme $A = \omega$ a funkci $f : {}^{\omega}\omega \rightarrow \omega$ takto:

- Pro $p : 0 \rightarrow \omega$ (prázdnou funkci) definujeme $f(p) = 1$
- Pro $p : 1 \rightarrow \omega$ definujeme $f(p) = 1$
- Pro $p : n \rightarrow \omega$ kde $n \geq 2$ definujeme $f(p) = p(n-1) + p(n-2)$

Položme $a = 1$. Podle Věty 2 existuje právě jedna funkce $h : \omega \rightarrow \omega$ splňující:

- $h(0) = 1$
- Pro každé $n \in \omega$ platí $h(n^+) = f(h \upharpoonright n)$

Tato funkce h definuje Fibonacciho posloupnost:

- $h(0) = 1$ (první Fibonacciho číslo)
- $h(1) = f(h \upharpoonright 1) = 1$ (druhé Fibonacciho číslo)
- $h(2) = f(h \upharpoonright 2) = h(1) + h(0) = 1 + 1 = 2$
- $h(3) = f(h \upharpoonright 3) = h(2) + h(1) = 2 + 1 = 3$
- $h(4) = f(h \upharpoonright 4) = h(3) + h(2) = 3 + 2 = 5$
- atd.

Princip rekurze II tedy zaručuje existenci a jednoznačnost Fibonacciho posloupnosti. ■

Definice. Necht' $(W, \preccurlyeq)$ je dobře uspořádaná množina.

(a) Nyní definujme funkce $\prec_s : W \rightarrow W$ a $\preceq_s : W \rightarrow W$ takto:

- Pro $u \in W$ definujeme $\prec_s(u) = \{x \in W : x \prec u\}$,
- Pro $u \in W$ definujeme $\preceq_s(u) = \{x \in W : x \preceq u\}$.

(b) Je-li A daná množina, pak definujeme:

- $\prec^W A = \{g : (\exists u \in W)(g \upharpoonright \prec_s(u) \rightarrow A)\}$,
- $\preceq^W A = \{g : (\exists u \in W)(g \upharpoonright \preceq_s(u) \rightarrow A)\}$.

Věta 3 (Princip transfinitní rekurze). Necht' $(W, \preccurlyeq)$ je dobře uspořádaná množina.

Necht' A je množina a $F : \prec^W A \rightarrow A$ je funkce. Pak existuje právě jedna funkce

$H : W \rightarrow A$, která splňuje podmínku:

$$H(u) = F(H \upharpoonright \prec_s(u)) \quad \text{pro každé } u \in W.$$

K důkazu Věty 3 (Princip transfinitní rekurze) je třeba prokázat existenci a jednoznačnost funkce H .

Důkaz Věty 3 (Princip transfinitní rekurze).

Máme dobře uspořádanou množinu $(W, \preccurlyeq)$, množinu A a funkci $F : \prec^W A \rightarrow A$.

Hledáme právě jednu funkci $H : W \rightarrow A$ takovou, že pro každé $u \in W$ platí

$$H(u) = F(H \upharpoonright \prec_s(u)).$$

1. Jednoznačnost funkce H

Předpokládejme, že existují dvě funkce $H_1 : W \rightarrow A$ a $H_2 : W \rightarrow A$, které obě splňují

danou podmínku: Pro každé $u \in W$: $H_1(u) = F(H_1 \upharpoonright \prec_s(u))$ Pro každé $u \in W$:

$$H_2(u) = F(H_2 \upharpoonright \prec_s(u))$$

Chceme ukázat, že $H_1 = H_2$, tj. $H_1(u) = H_2(u)$ pro všechna $u \in W$. Definujme podmnožinu $K \subseteq W$ jako $K = \{u \in W \mid H_1(u) = H_2(u)\}$. Použijeme Větu 1 (Princip transfinitní indukce) k důkazu, že $K = W$. Musíme ověřit předpoklad Věty 1, tj.

$$\forall u \in W ((\prec_s(u) \subseteq K) \Rightarrow (u \in K)).$$

Necht' $u \in W$ je libovolný prvek. Předpokládejme, že $\prec_s(u) \subseteq K$. To znamená, že pro každé $x \in W$ takové, že $x \prec u$, platí $H_1(x) = H_2(x)$. Z tohoto předpokladu vyplývá, že

restrikce funkcí H_1 a H_2 na množinu $\prec s(u)$ jsou identické: $H_1 \upharpoonright \prec s(u) = H_2 \upharpoonright \prec s(u)$.

Podle definice funkcí H_1 a H_2 : $H_1(u) = F(H_1 \upharpoonright \prec s(u))$ $H_2(u) = F(H_2 \upharpoonright \prec s(u))$

Jelikož $H_1 \upharpoonright \prec s(u) = H_2 \upharpoonright \prec s(u)$ a F je funkce, musí platit:

$F(H_1 \upharpoonright \prec s(u)) = F(H_2 \upharpoonright \prec s(u))$. Tudíž $H_1(u) = H_2(u)$, což znamená, že $u \in K$.

Předpoklad Věty 1 je splněn, proto $K = W$. Tím je dokázána jednoznačnost funkce H .

2. Existence funkce H

Existenci funkce H dokážeme konstrukcí. Definujme **aproximaci** jako funkci h takovou, že: (i) $\text{dom}(h) = \prec s(v)$ pro nějaké $v \in W$ (kde $\prec s(v) = \{x \in W \mid x \preceq v\}$). (ii) Pro každé $u \in \text{dom}(h)$ platí $h(u) = F(h \upharpoonright \prec s(u))$.

Ukážeme několik vlastností těchto aproximací:

(a) Kompatibilita aproximací: Necht' h_1 a h_2 jsou dvě aproximace. Pak $h_1(u) = h_2(u)$ pro všechna $u \in \text{dom}(h_1) \cap \text{dom}(h_2)$. Důkaz sporem: Předpokládejme, že množina $S = \{u \in \text{dom}(h_1) \cap \text{dom}(h_2) \mid h_1(u) \neq h_2(u)\}$ je neprázdná. Jelikož W je dobře uspořádaná, existuje nejmenší prvek $u_0 \in S$ vzhledem k $\prec$. Protože u_0 je nejmenší prvek v S , pro všechna $x \prec u_0$ (a $x \in \text{dom}(h_1) \cap \text{dom}(h_2)$) platí $h_1(x) = h_2(x)$. To znamená, že $h_1 \upharpoonright \prec s(u_0) = h_2 \upharpoonright \prec s(u_0)$. Podle definice aproximace: $h_1(u_0) = F(h_1 \upharpoonright \prec s(u_0))$ $h_2(u_0) = F(h_2 \upharpoonright \prec s(u_0))$. Protože argumenty funkce F jsou stejné, musí být $h_1(u_0) = h_2(u_0)$. To je spor s $u_0 \in S$. Množina S tedy musí být prázdná. Tím je kompatibilita dokázána. Z kompatibility vyplývá, že pokud aproximace na $\prec s(v)$ existuje, je jediná.

(b) Existence aproximace pro každý počáteční segment: Pro každé $v \in W$ existuje (jediná) aproximace h_v s $\text{dom}(h_v) = \prec s(v)$. Důkaz provedeme transfinitní indukcí podle $v \in W$. Necht' $P(v)$ je tvrzení: "Existuje aproximace h_v s $\text{dom}(h_v) = \prec s(v)$."

Předpokládejme, že pro všechna $x \prec v$ platí $P(x)$, tj. pro každé $x \prec v$ existuje

aproximace h_x s $\text{dom}(h_x) = \prec s(x)$. Definujme $g_v = \bigcup_{x \prec v} h_x$. Díky kompatibilitě (a) je

g_v funkce. Doménou (definičním oborem) g_v je

$\text{dom}(g_v) = \bigcup_{x \prec v} \text{dom}(h_x) = \bigcup_{x \prec v} \prec s(x) = \prec s(v)$. Pro libovolné $y \in \text{dom}(g_v)$ (tedy

$y \prec v$) platí $g_v(y) = h_y(y)$. Podle definice h_y jako aproximace platí

$h_y(y) = F(h_y \upharpoonright \prec s(y))$. Jelikož $h_y = g_v \upharpoonright \prec s(y)$, je $h_y \upharpoonright \prec s(y) = g_v \upharpoonright \prec s(y)$. Tedy

$g_v(y) = F(g_v \upharpoonright \prec s(y))$. Funkce $g_v : \prec s(v) \rightarrow A$ je tedy prvkem ${}^{\prec W}A$. Můžeme

definovat hodnotu $a_v = F(g_v)$.

Nyní definujme funkci h_v jako $h_v = g_v \cup \{\langle v, a_v \rangle\}$. Definičním oborem h_v je

$\prec s(v) \cup \{v\} = \prec s(v)$. Ověříme, že h_v je aproximace:

- Pro $u \prec v$: $h_v(u) = g_v(u) = F(g_v \upharpoonright \prec s(u))$. Jelikož $g_v \upharpoonright \prec s(u) = h_v \upharpoonright \prec s(u)$, platí $h_v(u) = F(h_v \upharpoonright \prec s(u))$.
- Pro $u = v$: $h_v(v) = a_v = F(g_v) = F(h_v \upharpoonright \prec s(v))$.

Tedy h_v je aproximace s $\text{dom}(h_v) = \prec s(v)$. Podle principu transfinitní indukce (Věta 1, aplikovaná na existenci těchto aproximací) taková aproximace h_v existuje pro každé

$v \in W$.

(c) Konstrukce funkce H : Definujme $H = \bigcup_{v \in W} h_v$, kde h_v je (jediná) aproximace s $\text{dom}(h_v) = \prec s(v)$. Jelikož všechny h_v jsou navzájem kompatibilní, H je funkce. Doménou H je $\text{dom}(H) = \bigcup_{v \in W} \text{dom}(h_v) = \bigcup_{v \in W} \prec s(v) = W$. Zbývá ověřit, že H splňuje požadovanou podmínku. Pro libovolné $u \in W$: $H(u) = h_u(u)$ (protože $u \in \text{dom}(h_u)$). Podle definice h_u jako aproximace platí $h_u(u) = F(h_u \upharpoonright \prec s(u))$. Jelikož H je sjednocením všech h_v a h_v jsou kompatibilní, tak $H \upharpoonright \prec s(x) = h_x$ pro každé $x \in W$. Speciálně $H \upharpoonright \prec s(u) = h_u \upharpoonright \prec s(u)$. Tedy $H(u) = F(H \upharpoonright \prec s(u))$. Tím je existence funkce H dokázána.

Jelikož jsme dokázali existenci i jednoznačnost, důkaz Věty 3 je kompletní. ■

Důsledek 1. Necht' A je daná množina a $f : {}^\omega A \rightarrow A$ je daná funkce. Pak existuje právě jedna funkce $h : \omega \rightarrow A$, která splňuje podmínku

$$h(n) = f(h \upharpoonright n) \text{ pro každé } n \in \omega.$$

Důkaz Důsledku 1.

Chceme dokázat, že pro danou množinu A a danou funkci $f : {}^\omega A \rightarrow A$ existuje právě jedna funkce $h : \omega \rightarrow A$ taková, že $h(n) = f(h \upharpoonright n)$ pro každé $n \in \omega$. Tento důsledek odvodíme z Věty 3 (Princip transfinitní rekurze).

1. **Volba dobře uspořádané množiny:** Položme $(W, \preccurlyeq) = (\omega, \leq)$, kde $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ je množina přirozených čísel (včetně nuly, chápána jako množina konečných ordinálních čísel) a $\leq$ je standardní uspořádání na ω . Toto je dobře uspořádaná množina, jak je uvedeno v Příkladu 1.
2. **Určení striktních iniciálních segmentů:** Pro $n \in \omega$ je striktní iniciální segment $\prec s(n)$ definován jako $\prec s(n) = \{m \in \omega \mid m < n\}$. V kontextu von Neumannových ordinálů platí, že ordinál n je množina všech menších ordinálů, tj. $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Tedy $\prec s(n) = \{0, 1, \dots, n-1\} = n$.
3. **Určení definičního oboru funkce F z Věty 3:** Množina ${}^\omega A$ z Věty 3 je v našem případě ${}^\omega A$. Podle definice (b) platí: ${}^\omega A = \{g \mid (\exists u \in \omega)(g : \prec s(u) \rightarrow A)\}$. Dosazením $\prec s(u) = u$ (kde u je prvek ω , tedy konečný ordinál) dostáváme: ${}^\omega A = \{g \mid (\exists u \in \omega)(g : u \rightarrow A)\}$. Připomeňme si definici množiny ${}^\omega A$ z Věty 2 (Princip rekurze II): ${}^\omega A = \{p \mid \text{pro jisté } n \in \omega \text{ je } p : n \rightarrow A\}$. Vidíme, že ${}^\omega A = {}^\omega A$.
4. **Definice funkce F pro Větu 3:** V Důsledku 1 máme danou funkci $f : {}^\omega A \rightarrow A$. Položme $F = f$. Jelikož ${}^\omega A = {}^\omega A$, funkce F má požadovaný definiční obor ${}^\omega A$ a obor hodnot A , jak vyžaduje Věta 3.
5. **Aplikace Věty 3:** Podle Věty 3 (Princip transfinitní rekurze) existuje právě jedna funkce, kterou zde označíme $H : \omega \rightarrow A$, taková, že pro každé $n \in \omega$ platí: $H(n) = F(H \upharpoonright \prec s(n))$.

6. **Závěr:** Dosazením $F = f \circ s(n) = n$ do výše uvedené rovnosti dostáváme, že existuje právě jedna funkce $H : \omega \rightarrow A$ taková, že pro každé $n \in \omega$ platí: $H(n) = f(H \upharpoonright n)$. Funkce $h \upharpoonright n$ je restrikce funkce h na množinu $\{0, 1, \dots, n-1\}$, což je funkce z n do A , tedy prvek ${}^\omega A$. Pokud označíme funkci H z Věty 3 jako h , pak tato funkce h je hledanou funkcí, jejíž existence a jednoznačnost je zaručena Větou 3.

Tím je důkaz Důsledku 1 dokončen. ■

Věta 4 (Existence prosté posloupnosti). Necht' A je daná nekonečná množina. Potom existuje prostá funkce $h : \omega \rightarrow A$.

Důkaz. Necht' A je daná nekonečná množina. Chceme dokázat, že existuje prostá funkce $h : \omega \rightarrow A$. K důkazu využijeme Důsledek 1.

1. **Příprava pro aplikaci Důsledku 1:** Důsledek 1 zaručuje existenci a jednoznačnost funkce $h : \omega \rightarrow A_s$ (kde A_s je nějaká množina), pokud máme funkci $f_c : {}^\omega A_s \rightarrow A_s$. V našem případě bude množina A_s shodná s danou nekonečnou množinou A . Potřebujeme tedy definovat vhodnou funkci $f_c : {}^\omega A \rightarrow A$.

2. **Definice pomocné funkce f_c :** Necht' $p \in {}^\omega A$. To znamená, že p je funkce $p : k \rightarrow A$ pro nějaké $k \in \omega$. Obraz (množina hodnot) funkce p je $\text{Im}(p) = \{p(0), p(1), \dots, p(k-1)\}$. Jelikož k je konečné číslo, $\text{Im}(p)$ je konečná podmnožina množiny A . Protože A je nekonečná množina, její podmnožina $\text{Im}(p)$ je konečná, tudíž rozdíl $A \setminus \text{Im}(p)$ je neprázdná množina (dokonce nekonečná). Abychom z množiny $A \setminus \text{Im}(p)$ vybrali prvek definujícím způsobem, použijeme axiom výběru. Axiom výběru zaručuje existenci výběrové funkce $\chi : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$ takové, že pro každou neprázdnou podmnožinu $S \subseteq A$ platí $\chi(S) \in S$. Nyní definujeme funkci $f_c : {}^\omega A \rightarrow A$ pro libovolné $p \in {}^\omega A$ takto:

$$f_c(p) = \chi(A \setminus \text{Im}(p)).$$

Jelikož $A \setminus \text{Im}(p)$ je vždy neprázdná, funkce f_c je dobře definovaná.

3. **Aplikace Důsledku 1:** Podle Důsledku 1, pro množinu A a funkci $f_c : {}^\omega A \rightarrow A$ definovanou výše, existuje právě jedna funkce $h : \omega \rightarrow A$ taková, že pro každé $n \in \omega$ platí:

$$h(n) = f_c(h \upharpoonright n).$$

Připomeňme, že $h \upharpoonright n$ je restrikce funkce h na množinu $\{0, 1, \dots, n-1\}$, tedy $h \upharpoonright n$ je funkce z n do A . Obraz této restrikce je $\text{Im}(h \upharpoonright n) = \{h(0), h(1), \dots, h(n-1)\}$. Dosazením definice f_c dostáváme:

$$h(n) = \chi(A \setminus \{h(0), h(1), \dots, h(n-1)\}).$$

4. **Důkaz, že funkce h je prostá:** Z konstrukce $h(n)$ vyplývá, že $h(n) \in A \setminus \{h(0), h(1), \dots, h(n-1)\}$. To znamená, že pro každé $n \in \omega$ platí $h(n) \neq h(k)$ pro všechna $k < n$. Abychom ukázali, že h je prostá, předpokládejme, že $h(m) = h(k)$ pro nějaká $m, k \in \omega$. Musíme ukázat, že $m = k$.

- Pokud by platilo $k < m$, pak $h(k) \in \{h(0), h(1), \dots, h(m-1)\}$. Ale $h(m)$ bylo definováno tak, že $h(m) \notin \{h(0), h(1), \dots, h(m-1)\}$. To by znamenalo $h(m) \neq h(k)$, což je spor.
- Pokud by platilo $m < k$, pak $h(m) \in \{h(0), h(1), \dots, h(k-1)\}$. Ale $h(k)$ bylo definováno tak, že $h(k) \notin \{h(0), h(1), \dots, h(k-1)\}$. To by znamenalo $h(k) \neq h(m)$, což je opět spor.

Jediná zbývající možnost je $m = k$. Funkce $h : \omega \rightarrow A$ je tedy prostá.

Tím je existence prosté funkce $h : \omega \rightarrow A$ pro nekonečnou množinu A dokázána. ■

S využitím Věty 4 lze dokázat následující důsledek:

Důsledek 2. Necht' A je daná množina. Potom A je nekonečná, právě když existuje prostá funkce $f : A \rightarrow A$, která není surjektivní.

Důkaz.

($\Rightarrow$) **Pokud A je nekonečná, pak existuje prostá funkce $f : A \rightarrow A$, která není surjektivní.**

1. Předpokládejme, že množina A je nekonečná.
2. Podle Věty 4 (Existence prosté posloupnosti) existuje prostá funkce $h : \omega \rightarrow A$. Označme $h_n = h(n)$ pro $n \in \omega$. Množina $H_A = \text{Im}(h) = \{h_0, h_1, h_2, \dots\}$ je spočetně nekonečná podmnožina množiny A . Jelikož h je prostá, všechny prvky h_n jsou navzájem různé.
3. Definujme funkci $f : A \rightarrow A$ následovně:

$$f(x) = \begin{cases} h_{n+1} & \text{pokud } x = h_n \text{ pro nějaké } n \in \omega \text{ (tj. } x \in H_A) \\ x & \text{pokud } x \in A \setminus H_A \end{cases}$$

4. **Důkaz, že f je prostá (injektivní):** Necht' $x, y \in A$ jsou dva prvky takové, že $f(x) = f(y)$. Musíme ukázat, že $x = y$. Rozlišíme několik případů:

- **Případ 1:** $x \in H_A$ a $y \in H_A$. Pak $x = h_n$ a $y = h_m$ pro nějaká $n, m \in \omega$. Podle definice f platí $f(x) = h_{n+1}$ a $f(y) = h_{m+1}$. Z $f(x) = f(y)$ tedy plyne $h_{n+1} = h_{m+1}$. Jelikož funkce h je prostá, musí platit $n + 1 = m + 1$, a tedy $n = m$. Z toho vyplývá $x = h_n = h_m = y$.
- **Případ 2:** $x \in A \setminus H_A$ a $y \in A \setminus H_A$. Pak $f(x) = x$ a $f(y) = y$. Z $f(x) = f(y)$ přímo plyne $x = y$.
- **Případ 3:** $x \in H_A$ a $y \in A \setminus H_A$. Pak $f(x) \in H_A$ (konkrétně $f(x) = h_{n+1}$ pro $x = h_n$). Naopak $f(y) = y \in A \setminus H_A$. Jelikož množiny H_A a $A \setminus H_A$ jsou disjunktní, nemůže nastat $f(x) = f(y)$. Tento případ tedy nemůže vést k $f(x) = f(y)$.
- **Případ 4:** $x \in A \setminus H_A$ a $y \in H_A$. Analogicky k Případu 3, tento případ nemůže vést k $f(x) = f(y)$.

Z uvedených případů vyplývá, že pokud $f(x) = f(y)$, pak musí x a y oba patřit do H_A nebo oba do $A \setminus H_A$, a v obou těchto situacích jsme odvodili $x = y$. Funkce f

je tedy prostá.

5. **Důkaz, že f není surjektivní:** Ukážeme, že prvek $h_0 \in H_A$ (tj. $h(0)$) není prvkem obrazu $\text{Im}(f)$.

- Pokud $x \in H_A$, pak $x = h_n$ pro nějaké $n \in \omega$. Potom $f(x) = h_{n+1}$. Jelikož $n \geq 0$, je $n + 1 \geq 1$. Proto $h_{n+1} \neq h_0$.
- Pokud $x \in A \setminus H_A$, pak $f(x) = x$. Jelikož $x \notin H_A$, platí $x \neq h_0$.

Tedy pro žádný prvek $x \in A$ nenastane $f(x) = h_0$. Prvek h_0 tudíž není v obrazu funkce f , a funkce f není surjektivní.

Tím je první směr implikace dokázán.

($\Leftarrow$) **Pokud existuje prostá funkce $f : A \rightarrow A$, která není surjektivní, pak A je nekonečná.**

1. Předpokládejme, že existuje prostá funkce $f : A \rightarrow A$, která není surjektivní.
2. Tuto implikaci dokážeme kontrapozicí. Kontrapozitivní tvrzení zní: "Pokud je množina A konečná, pak každá prostá funkce $f : A \rightarrow A$ je surjektivní." Necht' A je konečná množina. Označme počet jejích prvků $|A| = k$, kde $k \in \omega$. Necht' $f : A \rightarrow A$ je prostá funkce. Obraz funkce f je množina $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$. Protože f je prostá, zobrazuje k různých prvků množiny A na k různých prvků v $\text{Im}(f)$. To znamená, že počet prvků obrazu je $|\text{Im}(f)| = k$. Jelikož $\text{Im}(f)$ je podmnožinou A a zároveň $|\text{Im}(f)| = |A| = k$, musí platit $\text{Im}(f) = A$. Funkce f je tedy surjektivní.
3. Tím jsme ukázali, že pokud je A konečná, pak každá prostá funkce z A do A musí být surjektivní.
4. Z toho vyplývá, že pokud existuje prostá funkce $f : A \rightarrow A$, která *není* surjektivní (jak předpokládáme na začátku tohoto směru), pak množina A nemůže být konečná. Musí tedy být nekonečná.

Oba směry implikace byly dokázány, čímž je důkaz Důsledku 2 hotov. ■

Historická poznámka (Richard Dedekind):

Věta 4 a zejména Důsledek 2 jsou úzce spojeny s prací německého matematika **Richarda Dedekinda** (1831-1916). Dedekind ve své práci "Was sind und was sollen die Zahlen?" z roku 1888 definoval nekonečné množiny právě pomocí vlastnosti popsané v Důsledku 2.

Dedekindova definice: Množina A je **nekonečná** (v Dedekindově smyslu), pokud existuje prostá funkce $f : A \rightarrow A$, která není surjektivní. Ekvivalentně, množina A je nekonečná, pokud je ekvipotentní se svou vlastní podmnožinou.

Tato charakterizace nekonečných množin byla průkopnická a dodnes se používá v teorii množin. Dedekind tak ukázal, že nekonečnost lze definovat čistě množinově-teoreticky, bez odkazu na přirozená čísla nebo spočítání prvků.

V kontextu axiomatické teorie množin se Dedekindova definice ukázala být ekvivalentní s intuitivním chápáním nekonečnosti jako "nespočetnosti" prvků, což jsme právě dokázali v Důsledku 2.

Princip transfinite rekurze s využitím třídových funkcí

Definice funkcionální formule. Necht' $\varphi(g, u)$ je formule teorie množin. Řekneme, že $\varphi(g, u)$ je **funkcionální**, pokud

$$(\forall g)(\exists! u)\varphi(g, u).$$

Definice třídové funkce. Necht' $\varphi(g, u)$ je funkcionální formule. Pak **třídovou funkci** (nebo **funkcí třídy**) Φ definovanou pomocí φ rozumíme třídu

$$\Phi = \{ \langle g, u \rangle : \varphi(g, u) \}.$$

Nyní si připomeňme tzv. **Schéma axiomů nahrazení**:

Necht' $\psi(x, y)$ je formule teorie množin. Pro každou množinu A pro kterou platí:

$$\forall x \in A (\exists! y)\psi(x, y),$$

potom existuje množina S obsahující elementy y takové, že platí $\psi(x, y)$ pro nějaké $x \in A$.

Tedy, jestliže $(\forall x)(\exists! y)\psi(x, y)$, pak pro každou množinu A existuje množina

$$S = \{ y : \exists x (x \in A \wedge \psi(x, y)) \}.$$

Tudíž $f = \{ \langle x, y \rangle : x \in A \wedge \psi(x, y) \}$ je funkce. Tj. $f : A \rightarrow S$. Množina S je tedy obrazem množiny A vzhledem k funkci f , tj. $S = f[A]$.

Věta 5 (Princip transfinite rekurze s využitím třídových funkcí). Necht' $\varphi(x, y)$ je funkcionální formule (může obsahovat také parametry). Je-li dále $(W, \preceq)$ dobře uspořádaná množina, potom existuje jednoznačně určená funkce H taková, že $W = \text{dom}(H)$ a pro každé $u \in W$ platí:

$$\varphi(H \upharpoonright \prec s(u), H(u)).$$

Důkaz. Necht' $\mathbf{F}$ označuje třídovou funkci definovanou formulí φ ; tj. pro danou množinu x , $\mathbf{F}(x)$ je jednoznačně určená množina y taková, že $\varphi(x, y)$ platí. Podmínka ve větě pak zní $H(u) = \mathbf{F}(H \upharpoonright \prec s(u))$.

1. Jednoznačnost funkce H

Předpokládejme, že existují dvě funkce H_1 a H_2 takové, že $\text{dom}(H_1) = W$, $\text{dom}(H_2) = W$ a pro každé $u \in W$ platí:

- $\varphi(H_1 \upharpoonright \prec s(u), H_1(u))$ (tj. $H_1(u) = \mathbf{F}(H_1 \upharpoonright \prec s(u))$)
- $\varphi(H_2 \upharpoonright \prec s(u), H_2(u))$ (tj. $H_2(u) = \mathbf{F}(H_2 \upharpoonright \prec s(u))$)

Definujeme množinu $K = \{u \in W \mid H_1(u) = H_2(u)\}$. Použijeme Větu 1 (Princip transfinite indukce), která byla uvedena dříve, k důkazu, že $K = W$. Necht' $u \in W$ je libovolný prvek. Předpokládejme (jako indukční předpoklad pro transfinite indukci), že $\prec s(u) \subseteq K$. To znamená, že pro každé $x \in W$ takové, že $x \prec u$, platí $H_1(x) = H_2(x)$. Z tohoto předpokladu vyplývá, že funkce $H_1 \upharpoonright \prec s(u)$ a $H_2 \upharpoonright \prec s(u)$ jsou identické. Označme tuto funkci (která je množinou) jako g_u . Tedy $g_u = H_1 \upharpoonright \prec s(u) = H_2 \upharpoonright \prec s(u)$.

Podle předpokladů o H_1 a H_2 platí:

- $H_1(u) = \mathbf{F}(g_u)$
- $H_2(u) = \mathbf{F}(g_u)$

Jelikož $\varphi(x, y)$ je funkcionální formule, $\mathbf{F}(g_u)$ je jednoznačně určená množina. Proto $H_1(u) = H_2(u)$. To znamená, že $u \in K$. Podle Principu transfinite indukce (Věta 1) platí $K = W$. Tudíž $H_1 = H_2$. Tím je jednoznačnost funkce H dokázána.

2. Existence funkce H

Existenci funkce H dokážeme konstrukcí.

Definujeme **aproximaci** jako funkci h (tj. h je množina uspořádaných dvojic) takovou, že:
i. $\text{dom}(h) = \prec s(v)$ pro nějaké $v \in W$. (Připomeňme, že $\prec s(v) = \{x \in W \mid x \prec v\}$).
ii. Pro každé $u \in \text{dom}(h)$ platí $\varphi(h \upharpoonright \prec s(u), h(u))$ (tj. $h(u) = \mathbf{F}(h \upharpoonright \prec s(u))$).

(a) Kompatibilita aproximací: Necht' h_1 a h_2 jsou dvě aproximace. Pak $h_1(u) = h_2(u)$ pro všechna $u \in \text{dom}(h_1) \cap \text{dom}(h_2)$. Důkaz je analogický důkazu jednoznačnosti H . Předpokládejme sporem, že množina $S = \{x \in \text{dom}(h_1) \cap \text{dom}(h_2) \mid h_1(x) \neq h_2(x)\}$ je neprázdná. Jelikož W je dobře uspořádaná, existuje nejmenší prvek $u_0 \in S$. Pak pro všechna $x \prec u_0$ v $\text{dom}(h_1) \cap \text{dom}(h_2)$ platí $h_1(x) = h_2(x)$, takže $h_1 \upharpoonright \prec s(u_0) = h_2 \upharpoonright \prec s(u_0)$. Označme $g_0 = h_1 \upharpoonright \prec s(u_0)$. Pak $h_1(u_0) = \mathbf{F}(g_0)$ a $h_2(u_0) = \mathbf{F}(g_0)$. Z jednoznačnosti hodnoty $\mathbf{F}(g_0)$ plyne $h_1(u_0) = h_2(u_0)$, což je spor s tím, že $u_0 \in S$. Tudíž S musí být prázdná. Z kompatibility vyplývá, že pokud aproximace h_v s definičním oborem $\prec s(v)$ existuje, je jako funkce (množina uspořádaných dvojic) určena jednoznačně.

(b) Pro každé $v \in W$ existuje (jediná) aproximace h_v s $\text{dom}(h_v) = \prec s(v)$, a h_v je množina. Důkaz provedeme transfinite indukcí podle $v \in W$. Necht' $P(v)$ je tvrzení: "Existuje aproximace h_v s $\text{dom}(h_v) = \prec s(v)$ a h_v je množina." Předpokládejme (indukční předpoklad), že pro všechna $x \prec v$ platí $P(x)$. Tedy pro každé $x \prec v$ existuje jediná množina h_x , která je aproximací s $\text{dom}(h_x) = \prec s(x)$. Uvažujme třídu $\{h_x \mid x \prec v\}$. Protože $\prec s(v)$ je množina a pro každé $x \in \prec s(v)$ existuje právě jedna taková množina h_x (podle indukčního předpokladu a kompatibility), můžeme použít Schéma nahrazení. Formule $\psi(x, k)$ je " $x \in \prec s(v) \wedge k$ je aproximace h_x ". Schéma nahrazení zaručuje, že $\{h_x \mid x \prec v\}$ je množina. Označme tuto množinu $\mathcal{S}_v$. Definujme $g_v = \bigcup \mathcal{S}_v = \bigcup_{x \prec v} h_x$. Podle Axiomu sjednocení je g_v množina. Díky kompatibilitě (a) je g_v funkce. Její definiční obor je $\text{dom}(g_v) = \bigcup_{x \prec v} \text{dom}(h_x) = \bigcup_{x \prec v} \prec s(x) = \prec s(v)$. Jelikož g_v je množina (konkrétně funkce s definičním oborem $\prec s(v)$), můžeme ji použít

jako argument pro třídivou funkci $\mathbf{F}$. Necht' $y_v = \mathbf{F}(g_v)$. Podle definice $\mathbf{F}$ (z funkcionální formule φ) je y_v jednoznačně určená množina. Definujme $h_v = g_v \cup \{\langle v, y_v \rangle\}$. Toto je množina (sjednocení dvou množin). Definičním oborem h_v je $\prec s(v) \cup \{v\} = \prec s(v)$. Snadno se ověří, že h_v splňuje podmínku (ii) pro aproximaci:

- Pro $u \prec v$, $h_v(u) = g_v(u)$. Protože $g_v \upharpoonright \prec s(u)$ je samo o sobě aproximací h_u , platí $g_v(u) = \mathbf{F}(g_v \upharpoonright \prec s(u))$. Jelikož $g_v \upharpoonright \prec s(u) = h_v \upharpoonright \prec s(u)$, dostáváme $h_v(u) = \mathbf{F}(h_v \upharpoonright \prec s(u))$.
- Pro $u = v$, $h_v(v) = y_v = \mathbf{F}(g_v) = \mathbf{F}(h_v \upharpoonright \prec s(v))$.

Tedy h_v je aproximace s $\text{dom}(h_v) = \prec s(v)$ a h_v je množina. Podle principu transfinitní indukce tvrzení $P(v)$ platí pro každé $v \in W$.

(c) Konstrukce funkce H : Podle (b) pro každé $v \in W$ existuje jediná aproximace h_v (která je množinou) s $\text{dom}(h_v) = \prec s(v)$. Uvažujme třídu $\{h_v \mid v \in W\}$. Jelikož W je množina a pro každé $v \in W$ existuje právě jedna taková množina h_v , Schéma axiomů nahrazení zaručuje, že $\{h_v \mid v \in W\}$ je množina. Označme tuto množinu $\mathcal{S}_W$. Definujme $H = \bigcup \mathcal{S}_W = \bigcup_{v \in W} h_v$. Podle Axiomu sjednocení je H množina. Jelikož všechny h_v jsou navzájem kompatibilní funkce, H je funkce. Definičním oborem H je $\text{dom}(H) = \bigcup_{v \in W} \text{dom}(h_v) = \bigcup_{v \in W} \prec s(v) = W$. Pro libovolné $u \in W$ platí $H(u) = h_u(u)$ (protože $u \in \text{dom}(h_u)$). Podle definice h_u jako aproximace platí $\varphi(h_u \upharpoonright \prec s(u), h_u(u))$. Jelikož H je sjednocením všech h_x (pro $x \in W$) a ty jsou kompatibilní, platí $H \upharpoonright \prec s(x) = h_x$ pro každé $x \in W$. Speciálně tedy $H \upharpoonright \prec s(u) = h_u \upharpoonright \prec s(u)$. Z toho plyne, že $\varphi(H \upharpoonright \prec s(u), H(u))$ platí pro každé $u \in W$.

Funkce H je tedy množina uspořádaných dvojic, $\text{dom}(H) = W$ a splňuje danou rekurzivní podmínku. Existence je dokázána.

Tím je důkaz Věty 5 kompletní. ■

Důsledek 3. Necht' $\varphi(x, y)$ je funkcionální formule. Potom existuje právě jedna funkce F taková, že $\omega = \text{dom}(F)$ a pro každé $n \in \omega$ platí:

$$\varphi(F \upharpoonright n, F(n)).$$

Důkaz.

Chceme dokázat, že pro danou funkcionální formuli $\varphi(x, y)$ existuje právě jedna funkce F taková, že $\text{dom}(F) = \omega$ a pro každé $n \in \omega$ platí $\varphi(F \upharpoonright n, F(n))$. Tento důsledek odvodíme přímo z Věty 5 (Princip transfinitní rekurze s využitím třídivých funkcí).

1. **Volba dobře uspořádané množiny pro Větu 5:** Položme $(W, \preceq) = (\omega, \leq)$, kde $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ je množina přirozených čísel (chápaná jako množina konečných ordinálních čísel) a $\leq$ je standardní uspořádání na ω . Jak víme (např. Příklad 1 z úvodního textu), $(\omega, \leq)$ je dobře uspořádaná množina.

2. **Volba funkcionální formule pro Větu 5:** Věta 5 vyžaduje funkcionální formuli, kterou v jejím enunciatu označujeme $\varphi(x, y)$ (nebo $\psi(x, y)$ či jinými metajazykovými proměnnými pro argumenty). Důsledek 3 nám poskytuje

funkcionální formuli, kterou rovněž označujeme $\varphi(x, y)$. Tuto formuli přímo použijeme. Podle předpokladu Důsledku 3 je $\varphi(x, y)$ funkcionální formule, což znamená, že pro každou množinu x existuje právě jedna množina y taková, že $\varphi(x, y)$ platí.

3. **Aplikace Věty 5:** Podle Věty 5, pro dobře uspořádanou množinu $(W, \preceq) = (\omega, \leq)$ a funkcionální formuli $\varphi(x, y)$, existuje jednoznačně určená funkce H taková, že:

- $\text{dom}(H) = W = \omega$.
- Pro každé $u \in W$ (tedy pro každé $n \in \omega$) platí: $\varphi(H \upharpoonright \prec s(u), H(u))$.

4. **Přepis do terminologie Důsledku 3:** Označme funkci H z Věty 5 jako F , což je označení použité v Důsledku 3.

- Podmínka $\text{dom}(H) = \omega$ se stává $\text{dom}(F) = \omega$.
- Proměnná $u \in W$ odpovídá $n \in \omega$.
- Striktní iniciální segment $\prec s(u)$ prvku $u \in \omega$ (tedy $\prec s(n)$ pro $n \in \omega$) je definován jako $\prec s(n) = \{m \in \omega \mid m < n\}$. V kontextu von Neumannových ordinálů platí, že ordinál n je množina všech menších ordinálů, tj. $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Tedy $\prec s(n) = n$.
- Výraz $H \upharpoonright \prec s(u)$ se tak stává $F \upharpoonright n$. Funkce $F \upharpoonright n$ je restrikce funkce F na množinu $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Tato restrikce je funkcí s definičním oborem n (konečný ordinál), a tedy je množinou. Může tak sloužit jako první argument funkcionální formule φ .
- Hodnota $H(u)$ se stává $F(n)$. Toto je množina, která slouží jako druhý argument φ .

Podmínka z Věty 5 tedy zní: Pro každé $n \in \omega$ platí $\varphi(F \upharpoonright n, F(n))$.

5. **Závěr:** Funkce F (která je funkcí H z Věty 5) má definiční obor ω a pro každé $n \in \omega$ splňuje podmínku $\varphi(F \upharpoonright n, F(n))$. Existence a jednoznačnost takové funkce F je přímo zaručena Větou 5.

Tím je důkaz Důsledku 3 dokončen. ■

Věta 6 (Existence tranzitivního uzávěru). Necht' A je množina. Potom existuje tranzitivní množina T taková, že $A \subseteq T$.

Pro důkaz Věty 6 (Existence tranzitivního uzávěru) si připomeňme definici tranzitivní množiny:

Definice: Množina X je **tranzitivní**, pokud pro každý prvek $y \in X$ platí, že $y \subseteq X$ (tj. pokud $y \in X$ a $z \in y$, pak $z \in X$).

Důkaz:

1. **Konstrukce posloupnosti množin $(S_n)_{n \in \omega}$:** Chceme definovat posloupnost množin $S_0, S_1, S_2, \dots$ rekurzivně takto:

- $S_0 = A$
- $S_{n+1} = \bigcup S_n$ (kde $\bigcup X = \{z \mid \exists y \in X (z \in y)\}$)

Abychom formálně zaručili existenci této posloupnosti jako funkce $H : \omega \rightarrow \mathbf{V}$ (kde $\mathbf{V}$ je třída všech množin) takové, že $H(n) = S_n$, použijeme Důsledek 3. Důsledek 3 říká: "Nechť $\psi(p, y)$ je funkcionální formule. Potom existuje právě jedna funkce F taková, že $\omega = \text{dom}(F)$ a pro každé $n \in \omega$ platí: $\psi(F \upharpoonright n, F(n))$."

Definujme funkcionální formuli $\psi(p, y)$ následovně:

$$\psi(p, y) \equiv (\text{dom}(p) = 0 \wedge y = A) \vee (\exists k \in \omega (\text{dom}(p) = k + 1 \wedge y = \bigcup p(k)))$$

- Zde p je funkce, jejíž definiční obor $\text{dom}(p)$ je nějaké přirozené číslo n .
- Pokud $n = 0$ (tj. p je prázdná funkce $F \upharpoonright 0$), pak y je jednoznačně určeno jako A .
- Pokud $\text{dom}(p) = k + 1$ (tj. $p = F \upharpoonright (k + 1)$), pak $p(k)$ je $F(k)$ (předchozí člen posloupnosti). Množina $y = \bigcup p(k)$ je jednoznačně určena Axiomem sjednocení.

Formule $\psi(p, y)$ je tedy funkcionální.

Podle Důsledku 3 existuje právě jedna funkce $H : \omega \rightarrow \mathbf{V}$ taková, že pro každé $n \in \omega$ platí $\psi(H \upharpoonright n, H(n))$. Označme $S_n = H(n)$. Pak platí:

- $S_0 = H(0) = A$ (protože $\text{dom}(H \upharpoonright 0) = 0$).
- $S_{n+1} = H(n + 1) = \bigcup (H \upharpoonright (n + 1))(n) = \bigcup H(n) = \bigcup S_n$.

Tím je korektně definována posloupnost $(S_n)_{n \in \omega}$.

2. **Definice množiny T :** Položme $T = \bigcup_{n \in \omega} S_n = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \dots$. Aby T byla množina, musíme ukázat, že $\{S_n \mid n \in \omega\}$ je množina. Toto je obor hodnot funkce $H : \omega \rightarrow \mathbf{V}$. Jelikož $\text{dom}(H) = \omega$ je množina, podle Schématu axiomů nahrazení je i obor hodnot $\text{ran}(H) = \{S_n \mid n \in \omega\}$ množinou. Potom $T = \bigcup \text{ran}(H)$ je množina podle Axiomu sjednocení.

3. **Důkaz, že $A \subseteq T$:** Podle konstrukce $S_0 = A$. Jelikož $T = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \dots$, je zřejmé, že $S_0 \subseteq T$. Tudíž $A \subseteq T$.

4. **Důkaz, že T je tranzitivní:** Musíme ukázat, že pokud $x \in T$ a $y \in x$, pak $y \in T$.

- Nechť $x \in T$. Z definice T plyne, že existuje nějaké $n \in \omega$ takové, že $x \in S_n$.
- Nechť $y \in x$. Protože $x \in S_n$, platí $y \in \bigcup S_n$.
- Podle definice posloupnosti $(S_k)_{k \in \omega}$ je $S_{n+1} = \bigcup S_n$.
- Tedy $y \in S_{n+1}$.
- Jelikož S_{n+1} je jednou z množin, jejichž sjednocením je T , platí $S_{n+1} \subseteq T$.
- Z $y \in S_{n+1}$ a $S_{n+1} \subseteq T$ vyplývá, že $y \in T$.

Tím jsme ukázali, že T je tranzitivní množina a $A \subseteq T$. Množina T takto zkonstruovaná se nazývá **tranzitivní uzávěr** množiny A , často značený $\text{TC}(A)$.

Důkaz Věty 6 je tímto dokončen. ■

Cvičení na transfinite indukci a rekursi

Cvičení 1: Ordinální aritmetika – Sčítání

Definujte sčítání ordinálních čísel $\alpha + \beta$ pomocí transfinite rekurze podle druhého argumentu β :

1. $\alpha + 0 = \alpha$
2. $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ (kde $\beta + 1$ je následník β)
3. $\alpha + \lambda = \bigcup_{\gamma < \lambda} (\alpha + \gamma)$ pro limitní ordinál $\lambda \neq 0$.

Dokažte pomocí transfinite indukce (podle β), že pro libovolné ordinály α, β, γ platí asociativita: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Nápověda: Rozlišujte případy, kdy $\gamma = 0$, γ je následník, a γ je limitní ordinál.

Cvičení 2: Vlastnosti dobře uspořádaných množin

Nechť $(W, \preceq)$ je dobře uspořádaná množina. Dokažte pomocí transfinite indukce, že neexistuje žádná klesající posloupnost prvků z W délky ω , tj. neexistuje funkce $f : \omega \rightarrow W$ taková, že $f(n+1) \prec f(n)$ pro všechna $n \in \omega$.

Nápověda: Uvažujte množinu

$A = \{x \in W \mid \text{neexistuje klesající posloupnost z } W \text{ začínající } x \text{ délky } \omega\}$. Ukažte, že $A = W$.

Cvičení 3: Existence funkce minima

Nechť $(W, \preceq)$ je dobře uspořádaná množina a A je libovolná neprázdná množina. Nechť $g : {}^W A \rightarrow \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ je funkce, která každé funkci definované na striktním iniciálním segmentu prvku $u \in W$ přiřadí neprázdnou podmnožinu A . Dále nechť $\min : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$ je funkce, která každé neprázdne podmnožině A přiřadí její prvek (předpokládejme, že A je dobře uspořádaná, nebo použijte axiom výběru k definici $\min$).

Definujte pomocí Věty 3 (Princip transfinite rekurze) funkci $H : W \rightarrow A$ tak, že $H(u) = \min(g(H \upharpoonright \prec s(u)))$. Popište, jakou funkci F z Věty 3 byste použili.

Cvičení 4: Porovnání ordinálů

Dokažte pomocí transfinite indukce, že pro libovolné dva ordinály α, β platí právě jedna z následujících možností: $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, nebo $\beta < \alpha$. (Toto je zákon trichotomie pro ordinály).

Nápověda: Proved'te indukci například podle α . Pro dané α pak proved'te indukci podle β . Využijte faktu, že ordinál je tranzitivní množina dobře uspořádaná relací $\in$.

Cvičení 5: Rank množiny

Pro libovolnou množinu x definujeme její **rank**, $\text{rank}(x)$, pomocí transfinite rekurze takto:

$$\text{rank}(x) = \bigcup \{\text{rank}(y) + 1 \mid y \in x\}$$

(kde $\text{rank}(\emptyset) = 0$). Ukažte, že tato definice je korektní (tj. že ji lze založit na principu transfinite rekurze, např. na universu fundovaných množin WF). Dokažte pomocí transfinite indukce (podle struktury množin, tj. indukci přes relaci $\in$ na WF), že pro libovolné množiny x, y platí: Pokud $x \in y$, pak $\text{rank}(x) < \text{rank}(y)$.

Nápověda k definici: Rekurzi lze provést na dobře uspořádané třídě všech množin podle jejich "data narození". Pro důkaz vlastnosti uvažujte množinu $P(y) \equiv (\forall x \in y)(\text{rank}(x) < \text{rank}(y))$.

Vysvětlíme si podrobněji, co se míní pod **univerzem fundovaných množin**, často označovaným jako WF nebo jen V (v kontextu Zermelo-Fraenkelovy teorie množin s axiomem výběru, ZFC).

Univerzum fundovaných množin (WF)

Pojem "univerzum fundovaných množin" odkazuje na třídu všech množin, které lze "postavit" postupně od nejjednodušších základů způsobem, který zabraňuje určitým paradoxním konstrukcím, jako jsou množiny, které by obsahovaly samy sebe ($x \in x$) nebo nekonečné klesající řetězce prvků ($x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$).

Klíčovou roli zde hraje **Axiom fundovanosti** (někdy nazývaný Axiom regularity).

1. Axiom fundovanosti (regularity)

Tento axiom formálně říká:

$$\forall x (x \neq \emptyset \implies \exists y \in x (y \cap x = \emptyset))$$

Slovně: Každá neprázdna množina x obsahuje prvek y takový, že y a x nemají žádné společné prvky (jsou disjunktní). Tento prvek y se někdy nazývá $\in$ -minimální prvek množiny x .

Důsledky Axiomu fundovanosti:

- Žádná množina nemůže obsahovat sama sebe (neplatí $x \in x$). Kdyby ano, pak množina $\{x\}$ by byla neprázdna, ale její jediný prvek x by měl s $\{x\}$ společný prvek x , což by bylo ve sporu s axiomem.
- Neexistují řetězce typu $x \in y \in x$.
- Obecněji, neexistují žádné nekonečné klesající posloupnosti vzhledem k relaci $\in$: $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$. Pokud by taková posloupnost existovala, množina $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ by byla neprázdna. Každý prvek $x_n \in X$ by však měl neprázdny průnik s X (protože $x_{n+1} \in x_n$ a $x_{n+1} \in X$), což by bylo ve sporu s axiomem.

Axiom fundovanosti tedy zajišťuje, že relace "býti prvkem" ($\in$) je **dobře fundovaná** na jakékoli množině. To znamená, že každá neprázdna množina má $\in$ -minimální prvek (ve smyslu axiomu) a neexistují nekonečné $\in$ -klesající posloupnosti.

2. Kumulativní hierarchie množin (V_α)

Univerzum fundovaných množin WF se konstruuje "zdola nahoru" pomocí transfinite rekurze přes ordinální čísla. Definujeme třídu (indexovanou ordinály) množin V_α :

- **Základní krok:** $V_0 = \emptyset$ (začínáme s prázdnou množinou).
- **Následnický krok:** $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ (množina všech podmnožin předchozí úrovně; $\mathcal{P}(X)$ značí potenční množinu X).
- **Limitní krok:** $V_\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} V_\beta$ pro limitní ordinál λ (sjednocení všech předchozích úrovní).

Příklady prvních úrovní:

- $V_0 = \emptyset$
- $V_1 = \mathcal{P}(V_0) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $V_2 = \mathcal{P}(V_1) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $V_3 = \mathcal{P}(V_2) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- ...
- $V_\omega = \bigcup_{n < \omega} V_n$. Tato množina obsahuje všechny dědičně konečné množiny (množiny, jejichž prvky jsou dědičně konečné, atd.). V_ω slouží jako model pro teorii množin bez axiomu nekonečna.

Vlastnosti úrovní V_α :

1. Každá V_α je **množina** (to lze dokázat transfinite indukcí; pro V_0 je to zřejmé, $\mathcal{P}(V_\alpha)$ je množina, pokud V_α je množina (Axiom potenční množiny), a $\bigcup_{\beta < \lambda} V_\beta$ je množina, pokud každé V_β je množina a třída $\{V_\beta \mid \beta < \lambda\}$ je indexována množinou λ a lze použít Axiom sjednocení a Axiom nahrazení).
2. Každá V_α je **tranzitivní množina**. (Pokud $x \in V_\alpha$ a $y \in x$, pak $y \in V_\alpha$).
3. Hierarchie je **kumulativní (rostoucí)**: Pokud $\alpha < \beta$, pak $V_\alpha \subseteq V_\beta$.
4. Pokud $\alpha < \beta$, pak $V_\alpha \in V_\beta$ (konkrétně $V_\alpha \in V_{\alpha+1}$ protože $V_\alpha \subseteq V_\alpha$, tedy $V_\alpha \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$).

3. Rang (hodnota) množiny

Pro každou množinu x , která patří do nějaké úrovně V_α , můžeme definovat její **rang** (někdy též hodnota):

$$\text{rank}(x) = \min\{\alpha \mid x \in V_{\alpha+1}\}$$

Ekvivalentně, $\text{rank}(x)$ je nejmenší ordinál α takový, že $x \subseteq V_\alpha$. Definice rangu, kterou jste uvedli ve Cvičení 5 ($\text{rank}(x) = \bigcup\{\text{rank}(y) + 1 \mid y \in x\}$), je rekursivní definicí, která je s touto ekvivalentní pro fundované množiny.

- $\text{rank}(\emptyset) = 0$ (protože $\emptyset \in V_1 = V_{0+1}$)
- Pokud $x \in y$, pak $\text{rank}(x) < \text{rank}(y)$.

4. Univerzum fundovaných množin (WF)

Univerzum fundovaných množin WF (někdy označované jen V) je definováno jako sjednocení všech úrovní kumulativní hierarchie:

$$WF = V = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$$

kde $\mathbf{On}$ je třída všech ordinálních čísel.

Důležité body o WF :

- WF (nebo V) **je vlastní třída**, nikoli množina. Obsahuje všechny "dobře chovající se" množiny.
- **Vztah k Axiomu fundovanosti**: Axiom fundovanosti je ekvivalentní tvrzení, že **každá množina je fundovaná**, tj. každá množina patří do WF . V systému ZFC se tedy předpokládá, že třída všech množin je právě WF . Tedy V (jako třída všech množin v ZFC) se rovná $\bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$. Jinými slovy, každá množina má rang.

5. Význam pro transfinitní indukci a rekurzi

Struktura WF jako kumulativní hierarchie indexované ordinály je zásadní pro teorii množin:

- **Poskytuje "měřítko složitosti" množin**: Rang množiny udává, v jaké "fázi" konstrukce vesmíru se daná množina objevuje. Množiny s menším rangem jsou "jednodušší" nebo "dříve sestrojené".
- **Umožňuje důkazy transfinitní indukci "na všech množinách"**: Mnoho tvrzení o všech množinách lze dokázat transfinitní indukci podle rangu množin.
- **Umožňuje definice transfinitní rekurzi "na všech množinách"**: Funkce, jejichž definičním oborem je třída všech množin, lze definovat rekurzí podle rangu. Definice rangu ve vašem Cvičení 5 je příkladem takové rekurze (definujeme $\text{rank}(x)$ na základě rangů prvků $y \in x$, které mají menší rang).

Stručně řečeno, WF je představa vesmíru množin, kde je vše postaveno systematicky od prázdné množiny pomocí operace potenční množiny a sjednocení na limitních krocích, což zajišťuje dobrou fundovanost a vylučuje patologické případy. Axiom fundovanosti postulují, že *všechny* množiny, se kterými v ZFC pracujeme, do tohoto fundovaného univerza patří. Cvičení 5 o rangu množiny se opírá právě o tuto strukturu.