

Relace a funkce

Uspořádaná dvojice

Definice (Kazimierz Kuratowski, 1921). Necht' x, y jsou dvě množiny. Uspořádanou dvojicí $\langle x, y \rangle$ jejíž **první komponentou** je množina x a **druhou komponentou** je množina y rozumíme množinu

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Věta. Necht' u, v, x, y jsou dané množiny. Potom

$$\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \Leftrightarrow x = u \wedge y = v.$$

Důkaz. Důkaz proveďte jako samostatné cvičení. $\square$

Lemma. Pro všechna $x \in A$ a pro všechna $y \in B$ platí: $\langle x, y \rangle \in P(P(A \cup B))$. **Důkaz.**

Necht' $x \in A$ a $y \in B$. Potom zřejmě z definice potenční množiny plyne

$\{x\}, \{x, y\} \in P(A \cup B)$. Tedy $\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq P(A \cup B)$. Pak

$\{\{x\}, \{x, y\}\} \in P(P(A \cup B))$. Tedy dokázali jsme, že pro každé $x \in A$ a $y \in B$ je

$\langle x, y \rangle \in P(P(A \cup B))$. $\square$ **Definice.** Jsou-li A, B dané množiny, poto **kartézským**

součinem množin A, B budeme rozumět jednoznačně určenou množinu

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle \in P(P(A \cup B)) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Příklad. Necht' $A = \{2, 3\}$ a $B = \{a, b, c, 3\}$ Potom

$$A \times B = \{\langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 3, c \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}.$$

Relace

Definice. (Binární) relací R rozumíme jakoukoliv množinu, jejímiž elementy jsou

uspořádané dvojice. **Definice.** Necht' A, B jsou dané množiny. **Binární relací mezi**

množinou A a B se rozumí libovolná podmnožina R kartézského součinu $A \times B$, tj.

$R \subseteq A \times B$. **Definice.** Necht' A je množina. Množina R se nazývá **(binární) relací na množině** A , je-li $R \subseteq A \times A$.

Lemma. Necht' R je binární relace a necht' pro x existuje y tak, že $\langle x, y \rangle \in R$. Potom $x \in \bigcup \bigcup R$.

Lemma. Necht' R je binární relace a pro y existuje x tak, že $\langle x, y \rangle \in R$. Potom $y \in \bigcup \bigcup R$.

Definice. Předpokládejme, že R je binární relace.

1. **Definičním oborem** relace budeme rozumět množinu

$$\text{dom}(R) = \{x \in \bigcup \bigcup R : \exists y (\langle x, y \rangle \in R)\}.$$

2. **Oborem hodnot** relace R budeme rozumět množinu

$$\text{ran}(R) = \{y \in \bigcup \bigcup R : \exists x (\langle x, y \rangle \in R)\}.$$

3. **Polem** relace R budeme rozumět množinu

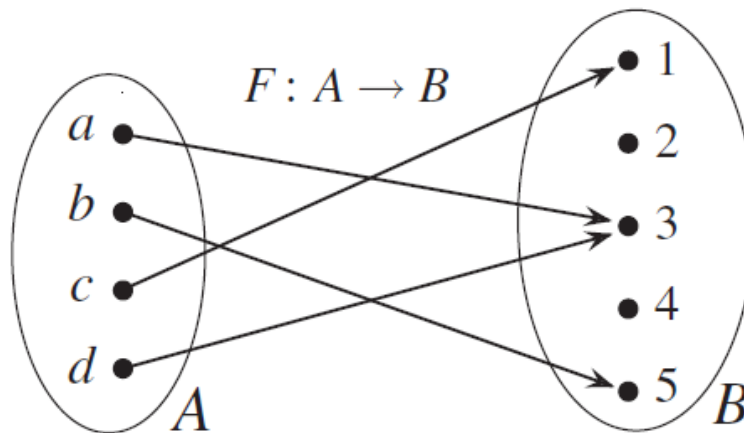
$$\text{fld}(R) = \text{dom}(R) \cup \text{ran}(R).$$

Funkce

Definice. Řekneme, že binární relace R je **jednoznačná**, jestliže pro každé $x \in \text{dom}(R)$ existuje právě jedno y takové, že $\langle x, y \rangle \in R$. Že relace R je jednoznačná znamená, že z toho, že $\langle x, y \rangle \in R$, $\langle x, z \rangle \in R$, plyne $y = z$. **Definice.** **Funkcí** budeme rozumět binární relaci F , která je jednoznačná. To znamená, že pro každé $x \in \text{dom}(F)$ existuje právě jedno y takové, že $\langle x, y \rangle \in F$. **Definice.** Necht' A a B jsou množiny a necht' F je relace mezi množinami A a B . Řekneme, že F je **funkce zobrazující množinu A do množiny B** a píšeme $F : A \rightarrow B$, pokud platí:

1. $\text{dom}(F) = A$,
2. F je jednoznačná relace.

Množinu $\text{dom}(F)$ nazveme definičním oborem funkce F . 3. $\text{ran}(F) \subseteq B$.



Příklad. Necht' $A = \{a, b, c, d, e\}$ a $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Dále položme $F = \{\langle a, 8 \rangle, \langle b, 7 \rangle, \langle c, 9 \rangle, \langle d, 6 \rangle, \langle e, 5 \rangle\}$. Potom je F funkce množiny A do množiny B , tj. $F : A \rightarrow B$. Na druhé straně binární relace G definovaná

$$G = \{\langle a, 8 \rangle, \langle b, 7 \rangle, \langle c, 9 \rangle, \langle d, 6 \rangle, \langle b, 8 \rangle, \langle e, 5 \rangle\}$$

není funkcí množiny A do množiny B . To proto, že $\langle b, 7 \rangle \in G$ a zároveň $\langle b, 8 \rangle \in G$, ale $7 \neq 8$. **Příklad.** Necht' $A = \{a, b, c, d\}$ a $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Uvažujme funkci $F : A \rightarrow B$ definovanou výčtem prvků: $F = \{\langle a, 3 \rangle, \langle b, 5 \rangle, \langle c, 1 \rangle, \langle d, 3 \rangle\}$. Potom je

$$F(a) = 3, F(b) = 5, F(c) = 1, F(d) = 3.$$

Definice. Necht' A, B jsou množiny. Potom definujeme třídu všech funkcí množiny A do množiny B jako třídu

$$B^A = \{F : F \text{ je funkcí množiny } A \text{ do množiny } B\}.$$

Cvičení. Ukažte, že třída B^A je množinou!

Operace s funkcemi

Definice. Necht' F a G jsou funkce.

1. **Inverzí** funkce F budeme rozumět binární relaci

$$F^{-1} = \{\langle v, u \rangle : \langle u, v \rangle \in F\}.$$

Tudíž $\langle y, x \rangle \in F^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in F \Leftrightarrow F(x) = y$. 2. Je-li A množina, potom **restrikcí** funkce F na množinu A se rozumí funkce

$$F \upharpoonright A = \{\langle u, v \rangle : \langle u, v \rangle \in F \wedge u \in A\}$$

jejíž definičním oborem je množina $\text{dom}(F) \cap A$. 3. Pro libovolnou množinu $A \subseteq \text{dom}(F)$ definujeme **obraz množiny** A vzhledem k funkci F jako podmnožinu množiny $\text{ran}(F)$ definovanou vztahem

$$F[A] = \{F(x) : x \in A\} = \{y : \exists x(x \in A \wedge y = F(x))\}.$$

4. Je-li B množina, potom definujeme **úplný vzor množiny** B vzhledem k funkci F jako podmnožinu množiny $\text{dom}(F)$ danou vztahem

$$F^{-1}[B] = \{u \in \text{dom}(F) : F(u) \in B\}.$$

5. Jsou-li F a G dvě funkce, potom definujeme jejich **složení (kompozici)** $F \circ G$ jako množinu:

$$F \circ G = \{\langle u, v \rangle : \exists t(\langle u, t \rangle \in G \wedge \langle t, v \rangle \in F)\}.$$

Jinak řečeno, $\langle u, v \rangle \in F \circ G \Leftrightarrow \exists t(\langle u, t \rangle \in G \wedge \langle t, v \rangle \in F)$. **Poznámky** (a) Je-li F funkce, potom je obecně vzato inverze F^{-1} binární relace, která nemusí být funkcí.

(b) Je-li F funkce a $A \subseteq \text{dom}(F)$, potom $F \upharpoonright A : A \rightarrow \text{ran}(F)$.

(c) Jsou-li F a G dvě funkce, proto jejich kompozice $F \circ G$ je též funkce.

(d) Je-li $F : A \rightarrow B$ funkce, potom je obor hodnot (range angl.) množina, kterou lze definovat zápisem

$$F[A] = \{F(x) : x \in \text{dom}(F)\}$$

neboť F je jednoznačnou relací. **Věta.** Necht' F a G jsou funkce. Potom platí

(a) $F \circ G$ je funkce.

(b) $\text{dom}(F \circ G) = \{x \in \text{dom}(G) : G(x) \in \text{dom}(F)\}$.

(c) Pro všechna $x \in \text{dom}(F \circ G)$ máme $(F \circ G)(x) = F(G(x))$. **Důkaz.** Cvičení. $\square$

Prosté funkce

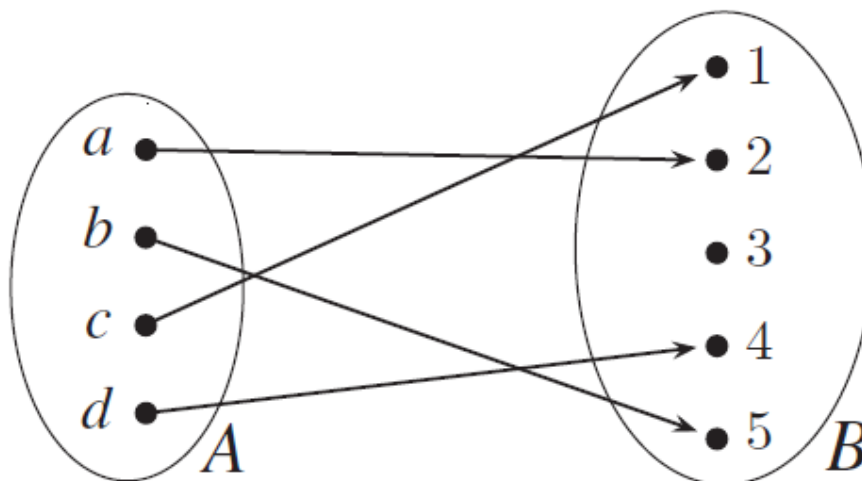
Definice. Řekneme, že funkce F je **prostou funkcí** nebo **injekcí**, jestliže platí

$$(\forall x \in \text{dom}(F))(\forall y \in \text{dom}(F))[F(x) = F(y) \Rightarrow x = y].$$

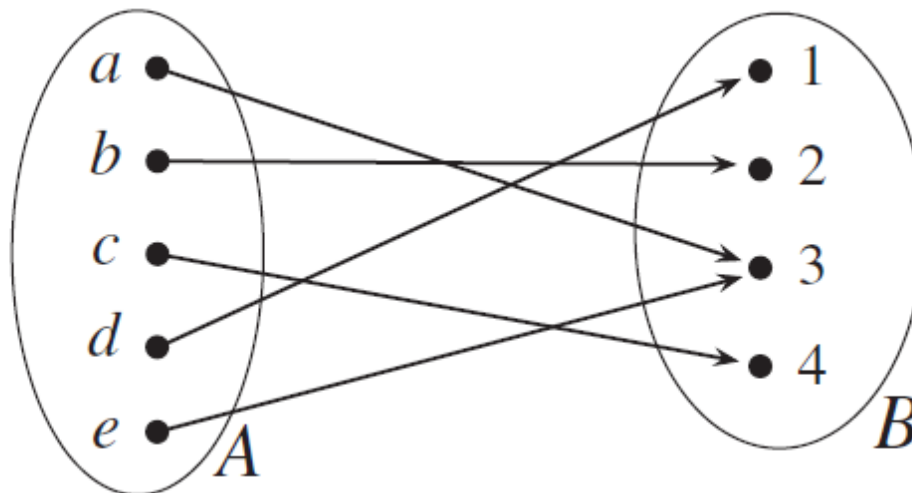
Definice. Funkce $F : A \rightarrow B$ je zobrazení "**na množinu B** " nebo **surjekcí**, pokud $\text{ran}(F) = B$. Formálně

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(F(x) = y).$$

Definice. Řekneme, že zobrazení $F : A \rightarrow B$ je **bijekcí množiny A na množinu B** , je-li F prostou funkcí a zároveň "na množinu B ".



Výše zobrazený diagram znázorňuje funkci $F : A \rightarrow B$ je ukázkou prosté funkce.



Výše zobrazený diagram znázorňuje funkci $F : A \rightarrow B$, která je surjekcí.

Věta. Jsou-li funkce $g : A \rightarrow B$ a $f : B \rightarrow C$ prosté, potom jejich kompozice $(f \circ g) : A \rightarrow C$ je též prostou funkcí.

Důkaz. Cvičení. $\square$

Relace uspořádání

Definice. Binární relace R na množině A se nazývá **antisymetrická**, platí-li

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)((xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y).$$

To znamená, že pokud současně $(x, y) \in R$ a $(y, x) \in R$, potom $x = y$.

Poznámka. V předchozí definici jsme použili zápis xRy jestliže platí $(x, y) \in R$.

Definice. Binární relace $\preccurlyeq$ na množině A se nazývá **částečným uspořádáním množiny** A , jsou-li pro všechna $x, y, z \in A$ splněny podmínky:

1. $x \preccurlyeq x$.
2. Jestliže $x \preccurlyeq y$ a $y \preccurlyeq x$, potom $x = y$.
3. Jestliže $x \preccurlyeq y$ a $y \preccurlyeq z$, potom $x \preccurlyeq z$.

Uspořádanou dvojici $(A, \preccurlyeq)$ pak nazveme **částečně uspořádanou množinou**.

Definice. Předpokládejme, že A je daná množina. Řekneme, že binární relace $<$ na množině A je **striktním částečným uspořádáním**, jestliže pro všechna $x, y, z \in A$ platí:

1. (Ireflexivita) $x \not< x$.
2. (Tranzitivita) Jestliže $x < y$ a $y < z$, potom $x < z$.

Cvičení. Předpokládejme, že $<$ je striktní částečné uspořádání na množině A . Potom definujme binární relaci $\preccurlyeq$ na množině A takto: $x \preccurlyeq y$ právě tehdy, když $x < y$ nebo $x = y$. Potom $\preccurlyeq$ je částečné uspořádání na množině A .

Cvičení. Předpokládejme, že $\preccurlyeq$ je částečné uspořádání na množině A . Definujme binární relaci $<$ na množině A takto: $x < y$ právě tehdy, když $x \preccurlyeq y$ a zároveň $x \neq y$. Potom $<$ je striktní částečné uspořádání na množině A .

Příklad. Uvažujme neprázdnou množinu $\mathcal{F}$ a necht' $\preccurlyeq$ je binární relací na $\mathcal{F}$ definovaná takto

$$(\forall U, V \in \mathcal{F})(U \preccurlyeq V \Leftrightarrow U \subseteq V).$$

Potom je relace $\preccurlyeq$ částečným uspořádáním množiny $\mathcal{F}$.

Definice. Předpokládejme, že $\preccurlyeq$ je částečným uspořádáním množiny A . Relace $\preccurlyeq$ se pak nazve **úplným (lineárním uspořádáním)** množiny A , jestliže je splněna podmínka

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x).$$

Uspořádanou dvojici $(A, \preccurlyeq)$ pak nazveme **úplně uspořádanou množinou**.

Příklad. $(\mathbb{R}, \leq)$ je úplně uspořádanou množinou.

Definice. Necht' $(A, \preccurlyeq)$ je částečně uspořádanou množinou. Pro $x, y \in A$ definujeme $x \prec y$ právě tehdy, když $x \preccurlyeq y$ a zároveň $x \neq y$. Relaci $\prec$ na množině A nazveme **striktním uspořádáním** odpovídajícím uspořádání $\preccurlyeq$.

Poznámka. Je-li $(A, \preccurlyeq)$ je úplně uspořádaná množina, potom odpovídající striktní uspořádání $\prec$ splňuje tzv. **trichotomii na množině** A :

pro každé dva elementy x a y množiny A platí právě jedna z následujících podmínek:
 $x \prec y, x = y, y \prec x$.

Definice. Necht' je $(A, \prec)$ částečně uspořádanou množinou a necht' $S \subseteq A$, $a \in A$ a $b \in A$.

1. Jestliže $(\forall x \in S)(x \preceq b)$ a $b \in S$, potom element b nazýváme **největším elementem množiny S** .
2. Jestliže $(\forall x \in S)(a \preceq x)$ a $a \in S$, potom element a nazveme **nejmenším elementem množiny S** .