

Axiomy teorie množin

Axiom Estenzionalità

Dvě množiny jsou si rovny právě tehdy, když obsahují stejné prvky:

$$\forall A \forall B (A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)).$$

Formule $\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ znamená, že množiny A a B obsahují stejné prvky.

Příklad: Definujme formálně množinu reálných čísel, která jsou řešením kvadratické rovnice $x^2 = 1$. (a)

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}.$$

$$\{-1, 1\}.$$

Existence prázdné množiny

Existuje množina, která neobsahuje žádný element:

$$\exists A \forall x (x \notin A).$$

Schéma axiomů vydělení

Nechť $\varphi(x)$ je logická formule. Potom pro každou množinu A existuje množina S obsahující všechny elementy $x \in A$ pro něž platí $\varphi(x)$:

$$\forall A \exists S \forall x (x \in S \Leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))).$$

Axiom neuspořádané dvojice

Pro každé dvě množiny u a v existuje množina, která obsahuje právě u a v jako svoje elementy:

$$\forall u \forall v \exists A \forall x (x \in A \Leftrightarrow (x = u \vee x = v)).$$

Axiom sjednocení

Pro každou množinu $\mathcal{F}$ existuje množina U , která obsahuje všechny elementy, které patří alespoň do jedné z množin, které jsou elementem množiny $\mathcal{F}$:

$$\forall \mathcal{F} \exists U \forall x (x \in U \Leftrightarrow \exists C (x \in C \wedge C \in \mathcal{F})).$$

$$\varphi(x) : \exists C (x \in C \wedge C \in \mathcal{F})$$

$$U = \{x : \varphi(x)\}$$

Bez použití axiomu sjednocení nejsme schopni existenci množiny A takové, že $\varphi(x) \implies x \in A$. **Příklad.** Předpokládejme, že $\mathcal{F} = \{A, B\}$. Potom platí:

$$\bigcup \mathcal{F} = A \cup B.$$

Axiom potenční množiny

Pro každou množinu A existuje množina P obsahující jako svoje elementy všechny podmnožiny množiny A :

$$\forall A \exists P \forall x (x \in P \Leftrightarrow \forall y (y \in x \Rightarrow y \in A)).$$

$$P = \{x : \forall y (y \in x \Rightarrow y \in A)\}$$

P je třída všech podmnožin množiny A . Podle axiomu potenční množiny je tato třída množinou!

Axiom nekonečna

Existuje množina I , která obsahuje prázdnou množinu jako svůj element a pokud $x \in I$, potom také $x \cup \{x\} \in I$:

$$\exists I (\emptyset \in I \wedge \forall x (x \in I \Rightarrow x \cup \{x\} \in I)).$$

Schéma axiomů nahrazení

Nechť $\psi(x, y)$ logická formule. Pro každou množinu A platí, že když pro každý element $x \in A$ existuje jediná množina y tak, že platí $\psi(x, y)$, potom existuje množina S , která obsahuje všechny elementy y pro něž existuje $x \in A$ tak, že platí $\psi(x, y)$:

$$\forall A ((\forall x \in A) \exists! y \psi(x, y) \Rightarrow \exists S \forall y (y \in S \Leftrightarrow (\exists x \in A) \psi(x, y))).$$

Axiom regularity

Každá neprázdná množina A obsahuje element disjunktní s A :

$$\forall A (A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x (x \in A \wedge x \cap A = \emptyset)).$$

Definice označení

1. $\emptyset := \{x : x \neq x\}$.
2. Ve schématu axiomů vydělení zapíšeme množinu S obsahující právě ty elementy x dané množiny A pro něž platí $\varphi(x)$ formulí $S = \{x \in A : \varphi(x)\}$.
3. Množinu obsahující právě množiny u, v v axiomu neuspořádané množiny označíme symbolem $\{u, v\}$. Je-li $u = v$, pak místo $\{u, v\}$ píšeme buď jenom $\{u\}$ nebo $\{v\}$.
4. Množinu U v axiomu označíme symbolem $\bigcup \mathcal{F}$.

Cvičení

1. Necht' u, v, w jsou množiny. Ukažte s pomocí axiomu neuspořádané dvojice, že existuje množina obsahující jako svoje elementy právě tyto množiny u, v, w , tj. dokažte existenci množiny $\{u, v, w\}$.
2. Předpokládejme, že A a B jsou množiny. Dokažte, že pokud $A \subseteq B$, pak $P(A) \subseteq P(B)$.
3. Necht' A je množina. S využitím axiomu neuspořádané dvojice dokažte existenci jednoprvkové množiny $\{A\}$.
4. (*) Necht' A je množina. Potom díky axiomu neauspořádané dvojice existuje jednoprvková množina $\{A\}$. Užijte axiom regularity a ukažte, že potom platí $A \cap \{A\} = \emptyset$. Odsud vyvoďte, že potom platí $A \notin A$.
5. Ukažte, že žádné dvě z množin $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ se sobě nerovnají.
6. (*) S pomocí schématu axiomů vydělení ukažte, že neexistuje množina X taková, že $P(X) \subset X$.

Tvoření nových množin pomocí axiomů

Důsledky prvních šesti axiomů

Axiom extenzionality

Jsou-li A, B dvě množiny, potom definujeme:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Chceme-li dokázat rovnost $A = B$, potom máme dvě možnosti:

1. Dokázat, že $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.
2. Dokázat, že pro všechna x platí $x \in A$ právě tehdy, když $x \in B$.

Axiom prázdné množiny

Tento axiom implikuje existenci množiny, která neobsahuje žádný element, $\emptyset$. Nyní díky axiomu extenzionality víme, že touto podmínkou je prázdná množina určena jednoznačně.

Schéma axiomů vydělení

Je-li A množina a $\varphi(x)$ je logická formule, potom existuje jediná množina $S = \{x \in A : \varphi(x)\}$. Odtud jednoduše plyne: $S \subseteq A$. Dále lze užitím schématu axiomů vydělení dokázat existenci průniku a rozdílu dvou množin neboť je

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in A : x \in B\} \\ A \setminus B &= \{x \in A : x \notin B\}. \end{aligned}$$

Na druhé straně ze schématu axiomů vydělení nelze vyvodit existenci sjednocení $A \cup B$.

Věta. Předpokládejme, že A , B a C jsou množiny. Potom platí

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C.$$

Důkaz. Necht' A , B a C jsou dané množiny. Dokažme, že pak platí uvedená rovnost.

($\subseteq$) Necht' $x \in A \cap (B \setminus C)$. Potom $x \in A$ a $x \in B \setminus C$. Odtud pak plyne, že $x \in A$, $x \in B$ a $x \notin C$. Protože $x \in A$ a současně $x \in B$, platí: $x \in A \cap B$. Protože dále $x \notin C$, plyne z předchozích vlastností elementu x , že $x \in (A \cap B) \setminus C$.

($\supseteq$) Necht' $x \in (A \cap B) \setminus C$. Potom současně platí, že $x \in (A \cap B)$ a $x \notin C$. Odtud plyne, že současně $x \in A$, $x \in B$ a $x \notin C$. Dále odsud plyne, že současně platí $x \in A$ a $x \in B \setminus C$. Potom platí $x \in A \cap (B \setminus C)$. $\square$ **Věta.** Neexistuje množina A taková, že každá množina je jejím elementem.

Důkaz. (Sporem). Necht' existuje množina A taková, že $\forall x(x \in A)$. Ze schématu axiomů vydělení pak existuje množina

$$B = \{x \in A : x \notin x\}.$$

Z definice množiny B nyní plyne, že

$$B \in B \Leftrightarrow B \notin B.$$

To je spor. $\square$ Jak jsme viděli, tak pro danou množinu A a logickou formuli $\varphi(x)$ pak matematická formule $\{x \in A : \varphi(x)\}$ zastupuje jednoznačně definovanou množinu S jejímiž elementy jsou množiny x takové, pro něž současně platí $x \in A$ a $\varphi(x)$. **Definice.** Je-li $\varphi(x)$ logická formule, potom matematická formule $\{x : \varphi(x)\}$ zastupuje tzv. **třidu**. Pokud zapíšeme:

$$C = \{x : \varphi(x)\},$$

potom nazveme proměnnou C třídou. Nyní řekneme, že **třída C je množinou**, pokud existuje množina M taková, že

$$\forall x(x \in M \Leftrightarrow \varphi(x)). \quad (C)$$

Pokud neexistuje množina M splňující vlastnost (C), říkáme, že třída C je **vlastní třídou**.

Věta. Necht' $\varphi(x)$ logická formule. Dále necht' existuje množina A taková, že pro všechna x z $\varphi(x)$ plyne $x \in A$. Potom je třída $C = \{x : \varphi(x)\}$ množinou.

Důkaz. Předpokládejme, že množina A a logická formule $\varphi(x)$ jsou zvoleny a platí

$$\forall x(\varphi(x) \Rightarrow x \in A).$$

V důsledku axiomu vydělení existuje množina

$$M = \{x \in A : \varphi(x)\}.$$

Pro množinu M pak platí (C), tj. třída C je množinou. Množina M je díky axiomu extenzionality určena jednoznačně. $\square$

Axiom neuspořádané dvojice

Jsou-li $x_1, \dots, x_n$ množiny, potom formule $\{x_1, \dots, x_n\}$ zastupuje množinu A pro kterou platí:

$$\forall u(u \in A \Leftrightarrow u = x_1 \vee u = x_2 \vee \dots \vee u = x_n).$$

Existence této množiny je důsledkem axiomu neuspořádané dvojice.

Axiom sjednocení

Pro každou množinu $\mathcal{F}$ existuje množina U taková, že obsahuje právě ty elementy, které náleží alespoň do jedné z množin, které jsou elementem množiny $\mathcal{F}$.

$$u \in U \Leftrightarrow \exists v(v \in \mathcal{F} \wedge u \in v).$$

$$\bigcup \mathcal{F} = U.$$

Příklad. Necht'

$$\mathcal{F} = \{\{a, b, c\}, \{e, f\}, \{e, c, d\}\}.$$

Pak máme:

$$\bigcup \mathcal{F} = \{a, b, c, d, e, f\}.$$

Příklad. Jestliže A, B jsou množiny a $\mathcal{F} = \{A, B\}$, potom platí

$$\bigcup \{A, B\} = A \cup B = \{x : x \text{ náleží do množiny } A \text{ nebo } x \text{ náleží do } B\}$$

Věta. Necht' $\mathcal{F}$ je neprázdná množina. Potom existuje jediná množina I taková, že $x \in I$, právě tehdy když x náleží do množiny u pro všechny množiny $u \in \mathcal{F}$. **Poznámka.**

$$I = \{x : \forall u(u \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in u)\}.$$

Důkaz. Uvažujme logickou formuli $\varphi(x)$:

$$\forall u(u \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in u).$$

Jelikož podle předpokladu je $\mathcal{F} \neq \emptyset$, existuje $A \in \mathcal{F}$. Nyní

$$\forall x(\varphi(x) \Rightarrow x \in A).$$

To znamená, že platí

$$I = \{x : x \in A \wedge \varphi(x)\}.$$

Odsud pak plyne existence množiny

$$I = \{x \in A : \varphi(x)\} = \{x \in A : \forall u(u \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in u)\}.$$

Z axiomu extenzionality pak plyne jednoznačnost množiny I . $\square$ **Definice průniku.** Necht' $\mathcal{F}$ je neprázdná množina. Množinu I jejíž existence je dána předchozí větou označíme symbolem $\bigcap \mathcal{F}$ a nazveme **průnikem množiny $\mathcal{F}$** . **Poznámka.** Připomeňme, že průnik prázdné množiny $\bigcap \emptyset$ není definován. **Příklad.** Necht'

$\mathcal{F} = \{\{c, e, f\}, \{e, f\}, \{e, f, c, d\}\}$. Potom

$$\bigcap \mathcal{F} = \{e, f\}.$$

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap \{e, f\} = e \cap f.$$

Příklad. Necht' $\mathcal{F} = \{ \langle -1/n, 1/n \rangle : n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \}$.

$$\bigcap \mathcal{F} = \{0\}.$$

Axiom potenční množiny

Axiom potenční množiny tvrdí, že pro každou množinu A je třída:

$$\{u : u \subseteq A\}$$

množinou. Tuto množinu nazveme **potenční množinou množiny A** a označíme symbolem $P(A)$. Poznamenejme, že tato množina je určena jednoznačně díky axiomu extenzionality. **Příklad.**

1. $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
2. $P(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$.
3. $P(\{\emptyset, a\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$.

Množinové operace

Věta (De Morganovy zákony). Je-li A množina a $\mathcal{F}$ je neprázdná množina. Potom platí:

a) $A \setminus \bigcup \mathcal{F} = \bigcap \{A \setminus C : C \in \mathcal{F}\},$

b) $A \setminus \bigcap \mathcal{F} = \bigcup \{A \setminus C : C \in \mathcal{F}\}.$ **Věta (Distributivní zákony).**

a) $A \cup (\bigcap \mathcal{F}) = \bigcap \{A \cup C : C \in \mathcal{F}\}$ pro $\mathcal{F} \neq \emptyset,$

b) $A \cap (\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup \{A \cap C : C \in \mathcal{F}\}.$ **Cvičení.** Dokažte De Morganovy a distributivní zákony.