Otázky MA3

Soubor zkušebních otázek z analýzy funkcí více proměnných

1.0 Metrické prostory a topologie

1.1 Úvodní kontext

Studium metrických prostorů a základních topologických pojmů představuje nezbytný teoretický základ pro analýzu funkcí více proměnných. Tyto koncepty poskytují přesný jazyk a formální aparát, bez kterého bychom nemohli precizně definovat a zkoumat klíčové vlastnosti, jako jsou limita a spojitost. Formalizace pojmů vzdálenosti, okolí bodu a otevřené množiny je tedy fundamentálním východiskem, na němž je postavena celá struktura vícerozměrného diferenciálního a integrálního počtu.

1.2 Základní definice a vlastnosti

1. **Definice metrického prostoru:** Uveďte přesnou definici metrického prostoru `(M, d)`. Definujte zobrazení metriky `d` a formulujte tři axiomy (M1, M2, M3), které musí splňovat pro všechny prvky `x, y, z ∈ M`.
2. **Příklady metrik:** Uveďte a popište alespoň dva konkrétní příklady metrik na prostoru $\mathbb{R}^n$. Specifikujte metriku `d(x, y) = |x − y|` pro prostor $\mathbb{R}$ a euklidovskou metriku pro prostor $\mathbb{R}^n$.
3. **Trojúhelníková nerovnost:** Dokažte platnost trojúhelníkové nerovnosti (axiom M3) pro euklidovskou metriku v prostoru $\mathbb{R}^n$. V důkazu využijte a formulujte Cauchy-Schwarzovu nerovnost.
4. **Norma a metrika:** Definujte pojem normy na vektorovém prostoru, včetně tří vlastností (N1, N2, N3), které musí splňovat. Následně vysvětlete, jakým způsobem lze pomocí normy definovat metriku na tomto prostoru.
5. **Topologické pojmy:** Definujte následující topologické pojmy v $\mathbb{R}^n$ a pro každý z nich uveďte konkrétní, netriviální příklad v prostoru $\mathbb{R}^2$: Otevřená koule, otevřená množina, uzavřená množina, uzávěr, vnitřek a hranice množiny.

1.3 Závěr a přechod

Zvládnutí těchto abstraktních topologických pojmů je klíčové, neboť nám poskytují rigorózní rámec pro precizní popis lokálního chování funkcí více proměnných, což je ústředním tématem následující kapitoly.

2.0 Funkce více proměnných: Limita a spojitost

2.1 Úvodní kontext

Funkce více proměnných přiřazují bodům ve vícerozměrném prostoru reálnou hodnotu a jsou základním nástrojem pro modelování komplexních jevů. Pro jejich hlubší pochopení a vizualizaci je zásadní porozumět pojmům jako definiční obor, který vymezuje oblast platnosti funkce, a dále graf a vrstevnice, které nám poskytují geometrickou a intuitivní představu o chování funkce v prostoru.

2.2 Zkušební otázky

1. **Definice a pojmy:** Definujte funkci dvou reálných proměnných. Dále vysvětlete, co se rozumí jejím přirozeným (maximálním) definičním oborem a oborem hodnot.
2. **Graf a vrstevnice:** Definujte graf funkce dvou proměnných a vrstevnici funkce pro konstantu `k`. Vysvětlete, jaký je geometrický vztah mezi grafem funkce a jejími vrstevnicemi.
3. **Definice limity:** Formulujte přesnou ("epsilon-delta") definici limity funkce dvou proměnných `f(x, y)` v bodě `(a, b)`, která je rovna `L`.
4. **Neexistence limity:** Popište metodu, kterou lze použít k důkazu neexistence limity funkce dvou proměnných. Metodu založte na přibližování k limitnímu bodu po různých křivkách (cestách) a ilustrujte ji na příkladu funkce `f(x, y) = (x^2 - y^2) / (x^2 + y^2)` v bodě (0, 0).
5. **Spojitost:** Definujte spojitost funkce dvou proměnných v bodě `(a, b)` a na množině `D`. Jaký je vztah mezi spojitostí funkce v daném bodě a existencí její limity v tomto bodě?
6. **Věta o sevření:** Formulujte znění věty o sevření (též věty o dvou policajtech) pro funkce dvou proměnných. Vysvětlete, jak ji lze použít k důkazu existence a výpočtu hodnoty limity.

2.3 Závěr a přechod

Zatímco pojmy limity a spojitosti nám umožňují kvalitativně popsat lokální chování funkcí, dalším logickým krokem je jeho kvantifikace. Nástroje diferenciálního počtu, zejména parciální derivace, nám poskytnou prostředky k přesnému měření míry a směru lokálních změn těchto funkcí.

3.0 Diferenciální počet funkcí více proměnných

3.1 Úvodní kontext

Diferenciální počet funkcí více proměnných je mocným nástrojem pro analýzu lokálních změn a chování těchto funkcí. Koncepty jako parciální derivace, směrová derivace a gradient přirozeně rozšiřují myšlenku derivace z jedné proměnné, ale zároveň přinášejí nové dimenze analýzy, jako je například zásadní závislost míry změny na zvoleném směru.

3.2 Zkušební otázky

1. **Parciální derivace:** Definujte parciální derivace funkce dvou proměnných `f(x, y)` podle `x` a podle `y` v bodě `(a, b)` pomocí příslušných limit. Dále popište praktický postup jejich výpočtu (tj. považování druhé proměnné za konstantu).
2. **Geometrická interpretace:** Vysvětlete geometrickou interpretaci hodnot parciálních derivací `fx(a, b)` a `fy(a, b)`. Popište jejich vztah ke směrnicím tečen ke křivkám, které vzniknou jako řezy grafu funkce `z = f(x, y)` rovinami `y = b` a `x = a`.
3. **Parciální derivace vyšších řádů:** Definujte parciální derivace druhého řádu (`fxx`, `fxy`, `fyx`, `fyy`). Formulujte Clairautovu větu o záměnnosti smíšených parciálních derivací a specifikujte její klíčový předpoklad týkající se spojitosti těchto derivací v okolí daného bodu.
4. **Tečná rovina a linearizace:** Na základě geometrické interpretace parciálních derivací odvoďte rovnici tečné roviny ke grafu funkce `z = f(x, y)` v bodě `(x0, y0, z0)`. Vaše odvození musí vycházet z faktu, že tečná rovina je určena tečnami k řezům grafu rovinami `y = y0` a `x = x0`. Následně definujte lineární aproximaci (linearizaci) funkce `f` v okolí tohoto bodu.
5. **Diferencovatelnost a totální diferenciál:** Definujte diferencovatelnost funkce dvou proměnných v bodě a definujte její totální diferenciál `dz`. Dále objasněte

vztah mezi diferencovatelností, spojitostí a existencí parciálních derivací. Uveďte, která vlastnost implikuje kterou, a formulujte větu, která poskytuje postačující podmínku pro diferencovatelnost založenou na spojitosti parciálních derivací.

6. **Řetězové pravidlo:** Formulujte řetězové pravidlo pro derivaci složené funkce pro následující dva případy:
   - **Případ I:** `z = f(x, y)`, kde `x = g(t)`, `y = h(t)`.
   - **Případ II:** `z = f(x, y)`, kde `x = g(s, t)`, `y = h(s, t)`.
7. **Směrová derivace a gradient:** Definujte směrovou derivaci funkce `f` v bodě `P` ve směru jednotkového vektoru `u`. Dále definujte gradient funkce `∇f` a formulujte větu, která dává směrovou derivaci do souvislosti s gradientem pomocí skalárního součinu (`D_u f = ∇f · u`).
8. **Vlastnosti gradientu:** Jaký je význam směru a velikosti vektoru gradientu `∇f` v daném bodě? Konkrétně, ve kterém směru je směrová derivace maximální a jaká je v tomto směru její hodnota?

3.3 Závěr a přechod

Nástroje diferenciálního počtu, jako jsou derivace a gradient, jsou klíčové pro detailní analýzu chování funkcí. V následující kapitole tyto nástroje aplikujeme na řešení praktických optimalizačních problémů, jako je vyhledávání lokálních a absolutních extrémů.

4.0 Aplikace diferenciálního počtu

4.1 Úvodní kontext

Diferenciální počet poskytuje metody, které mají široké praktické uplatnění. Mezi nejdůležitější aplikace patří aproximace složitých funkcí pomocí jednodušších polynomů, konkrétně Taylorova polynomu, a systematické vyhledávání lokálních, absolutních a vázaných extrémů. Tyto techniky jsou základem pro řešení optimalizačních úloh v mnoha vědních a technických oborech.

4.2 Zkušební otázky

1. **Taylorův polynom:** Uveďte formální vyjádření Taylorova polynomu stupně `k` pro funkci `n` proměnných v bodě `x` s využitím sumačního zápisu. Jako

konkrétní příklad rozepište detailně tvar Taylorova polynomu druhého stupně pro funkci dvou proměnných.

2. **Lokální extrémy a kritické body:** Definujte lokální maximum a lokální minimum funkce více proměnných. Dále definujte kritický (stacionární) bod a formulujte nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému v bodě, kde existují parciální derivace.
3. **Klasifikace kritických bodů:** Formulujte postačující podmínku pro klasifikaci kritických bodů funkce dvou proměnných (tzv. druhý derivační test). Vysvětlete, jakou roli hraje determinant `D = fxx * fyy - (fxy)^2` a hodnota `fxx` při rozhodování, zda se jedná o lokální minimum, lokální maximum, nebo sedlový bod.
4. **Absolutní extrémy:** Popište kompletní postup pro nalezení absolutních (globálních) extrémů spojité funkce na omezené a uzavřené množině. Uveďte jednotlivé kroky: nalezení kritických bodů uvnitř množiny, vyšetření extrémů na hranici množiny (což může vyžadovat její parametrizaci nebo rozdělení na jednodušší segmenty) a finální porovnání nalezených hodnot.
5. **Vázané extrémy a Lagrangeovy multiplikátory:** Vysvětlete princip metody Lagrangeových multiplikátorů pro hledání extrémů funkce `f(x, y)` za přítomnosti vazební podmínky `g(x, y) = k`. Formulujte klíčovou rovnici `∇f = λ∇g` a objasněte její geometrickou interpretaci související s kolinearitou gradientů v bodě extrému.

4.3 Závěr a přechod

Tato kapitola uzavřela téma diferenciálního počtu a jeho aplikací v optimalizaci. Nyní obrátíme pozornost k procesu inverznímu k derivování – integraci – která nám umožní řešit problémy, jako je výpočet objemů těles, obsahů ploch a dalších kumulativních veličin.

5.0 Dvojný integrál

5.1 Úvodní kontext

Dvojný integrál představuje přirozené zobecnění určitého integrálu funkce jedné proměnné pro funkce dvou proměnných. Jeho primární geometrická interpretace je objem tělesa, které je shora ohraničeno grafem nezáporné funkce a jehož podstavou je daná oblast v rovině. Tento koncept je klíčový pro výpočty v geometrii, fyzice a inženýrství.

5.2 Zkušební otázky

1. **Definice dvojného integrálu přes obdélník:** Popište, jak je definován dvojný integrál funkce `f(x, y)` přes obdélníkovou oblast `R` pomocí Riemannova integrálního součtu. Vysvětlete pojmy: dělení obdélníku na dílčí obdélníky, význačné body a limitní proces, ke kterému součty směřují.
2. **Fubiniho věta:** Formulujte Fubiniho větu pro spojitou funkci na obdélníkové oblasti. Vysvětlete, jak tato věta umožňuje výpočet dvojného integrálu pomocí dvou po sobě jdoucích (dvojnásobných) integrací a proč na pořadí integrace nezáleží.
3. **Geometrická interpretace Fubiniho věty:** Vysvětlete geometrickou interpretaci Fubiniho věty pro nezápornou funkci. Popište, jak výpočet dvojnásobného integrálu odpovídá výpočtu objemu tělesa postupnou integrací obsahů jeho plošných řezů (metoda "krájení").
4. **Integrace přes obecné oblasti:** Definujte oblasti typu I (`a ≤ x ≤ b, g1(x) ≤ y ≤ g2(x)`) a oblasti typu II (`c ≤ y ≤ d, h1(y) ≤ x ≤ h2(y)`). Uveďte, jak se pomocí Fubiniho věty formulují dvojnásobné integrály pro výpočet dvojného integrálu přes tyto typy oblastí.
5. **Vlastnosti dvojného integrálu:** Formulujte základní vlastnosti dvojného integrálu: linearitu (součet funkcí a násobek konstantou), aditivitu vzhledem k integrační oblasti (pro oblasti `D = D1 ∪ D2`) a monotonii (pro `f ≥ g`). Dále vysvětlete, jak lze pomocí dvojného integrálu vypočítat obsah rovinné oblasti `D` .