

Funkční řady

Pojem funkční řady

Je-li

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

posloupnost reálných funkcí definovaných na intervalu I . Pak nekonečnou funkční řadou rozumíme symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

Obor konvergence

Množina čísel $x \in I$ pro něž odpovídající číselná řada funkčních hodnot konverguje tvoří tzv. **konvergenční obor**.

Příklady

Určeme konvergenční obor funkčních řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot n \cdot x^{n-1}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 10^n \cdot x^n$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Řešení a)

a) Jedná se o geometrickou řadu s kvocientem $q = x$. Víme, že geom. řada konverguje, právě když platí $|q| < 1$. To znamená, že naše řada konverguje právě když $|x| < 1$, tedy když je $x \in (-1, 1)$.

Řešení b)

Vyšetřeme abs. konvergenci:

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \left| \frac{(n+1) \cdot x^n}{n \cdot x^{n-1}} \right| = \lim_n \frac{n+1}{n} \cdot |x| = |x| \cdot \lim_n \frac{n+1}{n} = |x| \cdot 1 = |x|.$$

Odtud plyne, že řada abs. konverguje, jestliže $|x| < 1$.

V případě, kdy platí $|x| \geq 1$ řada diverguje neboť není splněna nutná podmínka konvergence.

Řešení c)

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Opět použijeme podílové kritérium pro zkoumání abs. konvergence:

$$L = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = |x| \cdot \lim_n \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0.$$

Limita $L < 1$ a není závislá na x . Proto řada konverguje pro každé x .

Řešení d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 10^n \cdot x^n.$$

Užijme tzv. odmocninné kritérium:

$$L = \lim_n \sqrt[n]{10^n \cdot |x|^n} = 10 \cdot |x|.$$

$$L < 1 \iff x \in \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right).$$

Pro $x \notin \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$ řada diverguje.

Řešení e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Užijeme odmocninné kritérium:

$$L = \lim_n \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = |x| \cdot \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = |x|.$$

Zde byla použita vzorová limita: $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$.

Řada tedy abs. konverguje, je-li $x \in (-1, 1)$. Zkoumejme ještě konevergenci pro $x = \pm 1$.

Nechť $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}.$$

V důsledku Leibnizova kritéria pak tato (altnerující) řada konverguje.

Necht' $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Tedy oborem konvergence je polouzavřený interval: $\langle -1, 1 \rangle$.

Stejněměrná konvergence funkčních řad

Funkční řada $\sum_n f_n(x)$ konverguje na intervalu I **stejněměrně k funkci $S(x)$** , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, že pro všechna $x \in I$ a pro všechna $n > N$ platí

$$|S(x) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

Zde pro všechna $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$ je

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na intervalu I **bodově konverguje k funkci $S(x)$** , jestliže pro každé $x \in I$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $N_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n > N_{\varepsilon, x}$

$$|S(x) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

Příklad. Na intervalu $I = \langle 0, 1 \rangle$ zkoumejme konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Řešení. Nejdříve vyšetřeme tzv. bodovou konvergenci. Pro $x \in I$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad \text{pro } |x| < 1.$$

Zde je $S(x) = \frac{x}{1-x}$. A aby daná řada bodově konvergovala k $S(x)$, musí platit:

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N} : \quad |S(x) - s_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{pro } n > N_{\varepsilon, x}.$$

Kde platí:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k = \frac{x(1-x^{n+1})}{1-x} \quad \text{pro } |x| < 1.$$

Tedy musí platit:

$$\left| \frac{x}{1-x} - \frac{x(1-x^{n+1})}{1-x} \right| < \varepsilon, \quad \text{pro } n > N_{\varepsilon, x}.$$

Po zjednodušení dostaneme:

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} < \varepsilon, \quad \text{pro } n > N_{\varepsilon, x}.$$

```
In [1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definice funkce
def f(x, n):
    return (x**(n+1)) / (1-x)

# Vytvoření více grafů pro různé pohledy
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(15, 6))

# Generování hodnot x (vyhneme se přesně x=1, kde funkce není definována)
x = np.linspace(0, 0.99, 1000)

# Různé hodnoty n pro vykreslení
n_values = [0, 1, 2, 3, 5, 10]
colors = ['blue', 'red', 'green', 'purple', 'orange', 'brown']

# Graf 1: Lineární měřítko
for i, n in enumerate(n_values):
    y = f(x, n)
    ax1.plot(x, y, label=f'n = {n}', color=colors[i])

ax1.set_xlim(0, 1)
ax1.set_ylim(0, 20) # Omezíme maximální hodnotu y pro čitelnost
ax1.set_xlabel('x')
ax1.set_ylabel('f(x)')
ax1.set_title('Lineární měřítko')
ax1.legend()
ax1.grid(True)
ax1.axvline(x=1, color='r', linestyle='--', alpha=0.3, label='x=1 (asymptota)')

# Graf 2: Logaritmické měřítko pro lepší zobrazení chování blízko x=1
for i, n in enumerate(n_values):
    y = f(x, n)
    # Vyhnete se hodnotám, kde je y přesně nulové (pro x=0)
    valid_indices = y > 1e-10
    ax2.semilogy(x[valid_indices], y[valid_indices], label=f'n = {n}', color=col

ax2.set_xlim(0, 1)
ax2.set_xlabel('x')
ax2.set_ylabel('f(x) - logaritmické měřítko')
ax2.set_title('Logaritmické měřítko')
ax2.legend()
ax2.grid(True)
ax2.axvline(x=1, color='r', linestyle='--', alpha=0.3)

# Hlavní nadpis
plt.suptitle('Funkce $f(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$ na intervalu $[0, 1)$', fontst
plt.tight_layout()
plt.show()

# Detailní pohled na chování funkce poblíž nuly
plt.figure(figsize=(10, 6))
```

```

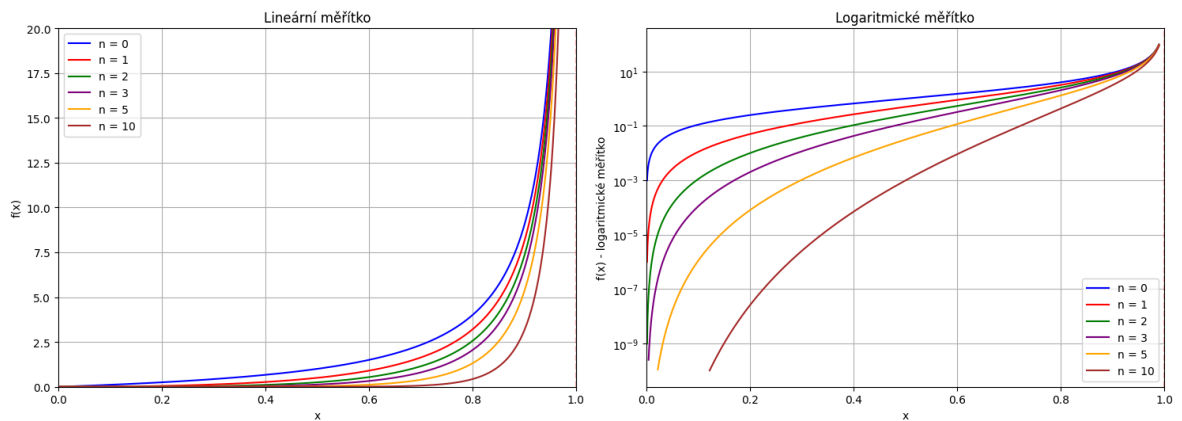
x_detail = np.linspace(0, 0.5, 1000) # Detailní pohled na interval [0, 0.5]

for i, n in enumerate(n_values):
    y = f(x_detail, n)
    plt.plot(x_detail, y, label=f'n = {n}', color=colors[i])

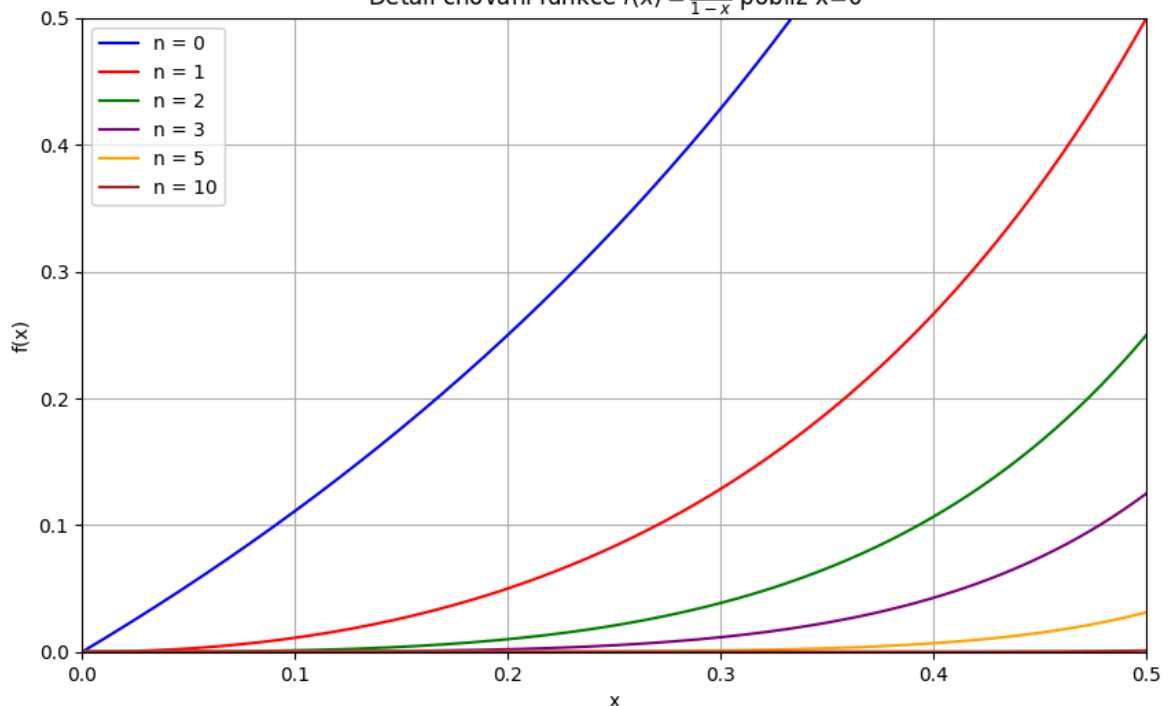
plt.xlim(0, 0.5)
plt.ylim(0, 0.5) # Omezíme maximální hodnotu y pro lepší detail
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.title('Detail chování funkce $f(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$ poblíž x=0')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```

Funkce $f(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$ na intervalu $[0, 1)$



Detail chování funkce $f(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$ poblíž $x=0$



Weierstrassovo kritérium

Věta. Funkční řada $\sum_n f_n(x)$ je na intervalu I stejnoměrně konvergentní, existuje-li k ní tzv. **majorantní konvergentní číselná řada** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňující na intervalu I pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnost

$$|f_n(x)| \leq a_n.$$

Příklady

Vyšetřeme stejnoměrnou konvergenci následujících řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}.$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}.$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2x}{x^2+n^3}.$

Řešení a)

Členy funkční řady jsou funkce $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$, které jsou definovány na intervalu $I = (-\infty, \infty)$. Dále platí:

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

pro každé $x \in I$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$. Použijme nyní W. kritérium s konvergentní majorantou $\sum_n \frac{1}{n^2}$. Podle W. kritéria řada stejnoměrně konverguje na intervalu I .

Řešení b)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}.$

Zvolme libovolné $a > 0$ a dokažme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $x \in (a, \infty)$,

$$\left| \frac{\cos nx}{e^{nx}} \right| \leq \frac{1}{e^{an}}.$$

$$\left| \frac{\cos nx}{e^{nx}} \right| \leq \frac{1}{e^{nx}} \leq \frac{1}{e^{na}}, \quad x > a.$$

Nyní vyšetřeme konvergenci majorantní řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{na}}$. Použijeme podílové limitní kritérium:

$$L = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \left| \frac{1}{e^{(n+1)a}} / \frac{1}{e^{na}} \right| = \frac{1}{e^a}.$$

Odtud zřejmě $L < 1$. Majorantní řada je tedy konvergentní řadou a z W. kritéria vyplývá stejnoměrná konvergence dané řady na každém intervalu $(a, +\infty)$, kde $a > 0$.

Řešení c)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2x}{x^2+n^3}.$

Funkce $\arctan \frac{2x}{x^2+n^3}$ jsou zřejmě liché hladké funkce na intervalu $I = (-\infty, \infty)$. Dále jsou tyto funkce na intervalu I omezené. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) = 0.$$

Tedy pro každé n je možné určit absolutní maximum/minimum funkce $f_n(x)$ na intervalu I . určíme za tím účelem nulové body první derivace:

$$f'_n(x) = \frac{2n^3 - 2x^2}{(x^2 + n^3)^2 + 4x^2}.$$

Položíme-li první derivaci rovnu nule, povede na to na rovnici:

$$2n^3 - 2x^2 = 0.$$

Nulové body první derivace jsou body: $x = \pm n\sqrt{n}$. Lokální maximum nastane pro $x = n\sqrt{n}$. Tedy maximum je rovno:

$$\phi(n) = f_n(n\sqrt{n}) = \arctan\left(\frac{2n\sqrt{n}}{(n\sqrt{n})^2 + n^3}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right).$$

Platí tedy pro každé $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$:

$$\left| \arctan \frac{2x}{x^2 + n^3} \right| \leq \arctan\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right) \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Poslední nerovnost plyne z nerovnosti:

$$|\arctan x| \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Majorantní řadou může být tedy konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. O konvergenci poslední řady se lze přesvědčit pomocí integrálního kritéria.

Mocninné řady

Nejdůležitějším příkladem funkční řady je tzv. mocninná (potenční) řada tvaru:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots \quad (*)$$

Obor konvergence mocninné řady určujeme obecně jako u funkčních řad. Užívá se tzv. **poloměr konvergence**.

Poloměr konvergence lze určit pomocí vzorce:

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Nebo

$$R = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}},$$

jestliže uvedené limity existují. Pokud obě limity existují, potom jsou si tyto limity rovny.

Je-li R poloměr konvergence mocninné řady (*), potom otevřený interval

$$(a - R, a + R)$$

nazveme **konvergenčním intervalem**.

Příklady

Určeme obor konvergence mocninných řad:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^{n-1}}.$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot x^n}{\sqrt{n}}.$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} (x-4)^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$

Řešení a)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^{n-1}}.$

$$c_n = \frac{1}{n \cdot 4^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) (Poloměr konvergence):

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_n \left[\frac{1}{n \cdot 4^{n-1}} : \frac{1}{(n+1) \cdot 4^n} \right] = \lim_n \frac{4^n \cdot (n+1)}{4^{n-1} \cdot n} = 4.$$

Konvergenční interval je interval $I = (a - R, a + R) = (-1 - 4, -1 + 4) = (-5, 3).$

Nyní vyšetřeme konvergenci v koncových bodech konvergenčního intervalu.

$$x = -5$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^{n-1}} \Big|_{x=-5} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5+1)^n}{n \cdot 4^{n-1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n \cdot 4^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Poslední řada je alternující konvergentní řada.

$$x = 3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^{n-1}} \Big|_{x=3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{n}.$$

Tato řada je divergentní řadou. Oborem konvergence výchozí řady je tedy interval: $\langle -5, 3 \rangle$.

Řešení b)

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot x^n}{\sqrt{n}}.$$

Zde $c_n = \frac{10^n}{\sqrt{n}}$. Potom

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_n \left[\frac{10^n}{\sqrt{n}} : \frac{10 \cdot 10^n}{\sqrt{n+1}} \right] = \lim_n \frac{1}{10} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1/10.$$

Konvergenční interval je $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$. Dále řada konverguje pro $x = -\frac{1}{10}$ a diverguje pro $x = \frac{1}{10}$.

```
In [2]: import scipy.integrate as integrate
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definice funkce
def integrand(x):
    return np.exp(-x**2)

# Výpočet integrálu
result, error = integrate.quad(integrand, 1, 10)
result, error
```

```
Out[2]: (0.13940279264033098, 3.928467470000696e-15)
```

Řešení c)

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} (x-4)^n$$

Opět použijme podílové kritérium:

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_n \left[\frac{3^n}{n+1} : \frac{3 \cdot 3^n}{n+2} \right] = 1/3.$$

Nyní určíme koncové body konvergenčního intervalu:

$$a - R = 4 - 1/3 = 11/3, \quad a + R = 4 + 1/3 = 13/3.$$

Konvergenčním intervalem je interval

$$(11/3, 13/3).$$

Nyní vyšetřeme konvergenci v koncových bodech konv. intervalu.

i) $x = 11/3$: dosazením obdržíme číselnou řadu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} (11/3 - 4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} \left(\frac{11-12}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} (-1/3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (-1)^n.$$

Tato řada je konvergentní jak plyne z Leibnizova kritéria.

ii) $x = 13/3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} (x-4)^n \Big|_{x=13/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} (13/3 - 4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} (1/3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty.$$

Tedy obor konvergence je polozavřený interval $\langle 11/3, 13/3 \rangle$.

Řešení d)

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$. Zde

$$c_n = \frac{1}{(2n)!}.$$

Nyní vypočítejme poloměr konvergence:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(2n)!} : \frac{1}{(2(n+1))!} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(2n)!} : \frac{1}{(2n+2)!} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+2)(2n+1) \end{aligned}$$



Konvergenční interval je tedy interval $(-\infty, +\infty)$. Odtud zároveň plyne, že obor konvergence je interval $(-\infty, +\infty)$.

Vlastnosti mocninných řad

Nechť má mocninná řada $\sum_n c_n \cdot x^n$ poloměr konvergence $R > 0$. Pak platí následující:

- i) Součet $S(x) = \sum_n c_n \cdot x^n$ je na konvergenčním intervalu spojitou funkcí.
- ii) Mocninná řada konverguje stejnoměrně k funkci $S(x)$ na každém uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle \subset (-R, R)$.
- iii) Mocninná řada může být derivována nebo integrována člen po členu libovolněkrát v každém uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle \subset (-R, R)$. Řady vzniklé derivováním nebo integrováním dané mocninné řady mají s ní společný poloměr konvergence.

iv) Je-li $\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n)'$ součet řady vzniklé derivováním mocninné řady člen po členu, pak platí:

$$\sigma(x) = S'(x).$$

Je-li $\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n x^n dx$ součet řady vzniklé integrováním mocninné řady člen po členu, pak platí:

$$\sigma(x) = \int S(x) dx + C,$$

kde C určíme dosazením $x = 0$ do poslední rovnosti.

Příklady

U následujících mocninných řad určíme obor konvergence a součet řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}.$

Řešení a)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$

i) (poloměr konvergence)

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_n \left[\frac{1}{n} / \frac{1}{n+1} \right] = 1.$$

Tedy konvergenčním intervalem je interval: $(-1, 1)$.

ii) (Konvergence v koncových bodech konv. intervalu):

$$x = -1 : \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \Big|_{x=-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (-1)^n.$$

Tato řada konverguje díky Leibnizově kritériu.

$$x = 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \Big|_{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Tedy obor konvergence je roven intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

iii) (Součet řady): DAná řada vznikla integrováním řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Označíme-li nyní $\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, Potom platí:

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int x^{n-1} dx = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C.$$

Konstantu C určíme dosazením $x = 0$ do předchozího vztahu:

$$0 = \sigma(0) = -\ln(1 - 0) + C \implies C = 0.$$

Řešení b)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$.

i) (Poloměr konvergence):

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1.$$

ii) (Konvergence v koncových bodech konv. intervalu):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \Big|_{x=-1}^{x=-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1)^{n-1} \implies$$

řada diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \Big|_{x=1}^{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \implies$$

řada diverguje. Tedy obor konvergence je roven otevřenému intervalu

$$(-1, 1).$$

iii) (Součet řady): Výchozí řada vznikla derivováním mocninné řady (jedná se o geometrickou řadu s kvocientem $q = x$ a kde první člen řady je roven x .) Tedy Platí:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \implies$$

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Taylorovy a MacLaurinovy řady

Předpokládejme, že funkce $f : (a - \delta, a + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě a derivace všech řádů. Potom mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n$$

nazveme **Taylorovým rozvojem funkce f v bodě $x = a$** . V případě, kdy je $a = 0$, hovoříme o tzv. **MacLaurinově rozvoji funkce f** .

Taylorův rozvoj funkce f v bodě $x = a$ je mocninnou řadou se středem v bodě $x = a$.

Zbytek v Taylorově rozvoji

Funkci $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$ nazveme **zbytkem v Taylorově rozvoji**. Zde $n \in \mathbb{N}$, $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Nutná a postačující podmínka k tomu, aby Taylorova řada konvergovala a její součet byl roven $f(x)$ je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Zbytek $R_n(x)$ lze vyjádřit v tzv. Lagrangeově tvaru u T. rozvoje v bodě $x = a$ takto

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}, \text{ kde } \xi = a + \theta \cdot (x-a), \theta \in (0,1).$$

Má-li funkce f v bodě a derivace všech řádů a existuje-li $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in (a-\delta, a+\delta)$ platí:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n,$$

pak říkáme, že **funkce f je v bodě $x = a$ analytická**.

Věta (Postačující podmínka analytičnosti). Nechť má funkce f v bodě a derivace všech řádů a nechť pro $K > 0$ je na jistém okolí bodu a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splněna podmínka

$$|f^{(n)}(x)| \leq K.$$

Potom je funkce f analytická v bodě $x = a$.

konec 23.4.24

Příklady a)

a) Najděme MacLaurinův rozvoj funkce $\cos x$ a ukažme, že funkce $\cos x$ je v bodě $x = 0$ analytickou funkcí.

Řešení a)

Počítejme postupně derivace v bodě $x = 0$.

- $f(0) = \cos(0) = 1,$
- $f'(0) = \cos'(0) = -\sin(0) = 0,$
- $f''(0) = -\sin'(0) = -\cos(0) = -1,$
- $f'''(0) = \sin(0) = 0,$
- $f^{(4)}(0) = \sin'(0) = \cos(0) = 1,$
- ...

Dosazením do obecného tvaru MacLaurinova rozvoje dostáváme mocninnou řadu:

$$1 + \frac{0}{1!} \cdot x + \frac{-1}{2!} x^2 + \frac{0}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} + \dots$$

Dále pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1.$$

Tedy funkce $f(x) = \cos(x)$ je analytická v bodě $x = 0$. Lze tedy na okolí nuly psát:

$$\cos(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!} \cdot x^{2n}.$$

Příklady b)

a) Samostatně nyní ukažte, že

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1}.$$

Řešení b)

MacLaurinův rozvoj funkce $\sin x$ lze s výhodou obdržet integrováním rozvoje funkce $\cos x$.

$$\cos x = 1 + \frac{0}{1!} \cdot x + \frac{-1}{2!} x^2 + \frac{0}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{6!} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Příklady c)

Ověřme následující rozvoj funkce $y = e^x$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Řešení c)

- $f(0) = e^0 = 1,$
- $f'(0) = e^0 = 1,$
- ...
- $f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$

Odtud plyne tvar MacLaurinova rozvoje:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Jedná se o mocninnou řadu, jejíž poloměr konvergence je $R = \infty$. Dále nechť $\delta > 0$ je libovolně pevně zvoleno. Pak platí pro každé $x \in (-\delta, \delta)$:

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^\delta = K.$$

To dokazuje, že exponenciála je v bodě $x = 0$ analytickou funkcí a platí výše uvedený vzorec (*).

```
In [ ]: ##### Zde je hlavička #####
from math import *
import sympy as sym
from sympy.plotting import plot3d
from IPython.display import Math, display, Latex
import numpy as np
# sym.init_printing()
#####
```

```
In [ ]: from sympy.abc import x
sym.sqrt(1 / 1-x**2).series(n=15)
```

```
Out[ ]: 1.0 - 0.5x2 - 0.125x4 - 0.0625x6 - 0.0390625x8 - 0.02734375x10 - 0.0205078125x12
```

Věta. Předpokládejme, že funkce f je rovna součtu mocninné řady v bodě $x = a$, tj., že pro $R > 0$ je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - a)^n, \text{ pro každé } x \in (a - R, a + R).$$

Potom pro koeficienty c_n platí:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Nyní shrneme Tylorovy rozvoje některých důležitých elementárních funkcí.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad R = 1, \\ e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad R = \infty, \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad R = \infty, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad R = \infty, \\ \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad R = 1, \\ (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots, \quad R = \\ \arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad R = 1.\end{aligned}$$

Příklady

Příklad (a). Najděme Maclaurův rozvoj funkce $f(x) = x \cos x$.

Řešení a)

$$x \cos x = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Příklad (b). Najděme Maclaurův rozvoj funkce $f(x) = \ln(1 + 3x^2)$.

Řešení b)

$$\ln(1 + 3x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(3x^2)^n}{n} = 3x^2 - \frac{9x^4}{2} + \frac{27x^6}{3} - \frac{81x^8}{4} + \dots$$

Z předchozí tabulky víme, že Maclaurův rozvoj funkce $\ln(1+x)$ je roven

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Zde je poloměr konvergence roven $R = 1$. Tedy v našem případě musí platit $|3x^2| < 1$, tj. $|x| < 1/\sqrt{3}$.

Příklad (c). Určete funkci, jejíž Maclaurinův rozvoj je roven

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^n}{n!}.$$

Řešení c)

Upravme mírně danou mocninnou řadu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = e^{-2x}.$$

Příklad (d). Najděme součet řady:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

Řešení d)

Pomocí sumačního symbolu lze danou řadu zapsat jako

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

Nyní lze přepsat tuto řadu do tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}.$$

Z předchozí tabulky rozvoje plyne, že Maclaurův rozvoj funkce $\ln(1+x)$ je roven

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Tedy pro $x = 1/2$ platí

$$\ln(1 + 1/2) = \ln(3/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

Příklad (e). Najděme neurčitý integrál

$$\int e^{-x^2} dx.$$

Řešení e)

Nejdříve najděme Maclaurův rozvoj funkce e^{-x^2} . Vyjděme z Maclaurinova rozvoje funkce e^x :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Nyní dosadíme $-x^2$ za x do výše uvedeného rozvoje:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

Nyní můžeme integrovat člen po členu:

$$\int e^{-x^2} dx = \int \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right) dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots$$



Tedy

$$\int e^{-x^2} dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

Tato mocninná řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$ protože poloměr konvergence je $R = \infty$. $\square$

Příklad (f). Vypočítejte přibližně hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Řešení f)

Předchozí příklad nám poskytl Maclaurův rozvoj primivní funkce k funkci e^{-x^2} . Tedy

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \dots$$

Tedy pokud použijeme prvních 5 členů rozvoje, obdržíme přibližně hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} \approx 0.7475.$$

Jelikož je řada alternující konvergentní řada, můžeme odhadnout chybu aproximace. Pro chybu aproximace platí

$$|R| < \frac{1}{11 \cdot 5!} < 0.001.$$

Příklad (g). Užitím Maclaurinova rozvoje funkce e^x určete limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Řešení g)

Víme, že Maclaurův rozvoj funkce e^x je roven

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Odtud dostáváme vyjádření pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1}{x} &= \left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - 1 \right] \cdot \frac{1}{x} \\ &= \left[x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right] \cdot \frac{1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Poloměr konvergence této řady je $R = \infty$. Tedy funkce $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ je definována na $\mathbb{R}$ a je spojitou funkcí. Tudíž můžeme psát

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} S(x) = S(0) = 1.$$

Příklad (h). Užitím Maclaurinova rozvoje funkce e^x určete limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Řešení h)

Víme, že Maclaurův rozvoj funkce e^x je roven

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Odtud dostáváme vyjádření pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - 1 - x \right] \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) = \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Poloměr konvergence této řady je $R = \infty$. Tedy funkce $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$ je definována na $\mathbb{R}$ a je spojitou funkcí. Tudíž můžeme psát

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} S(x) = S(0) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}.$$

Příklad (i). Užitím Maclaurinova rozvoje funkce $\ln(1+x)$ určete limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{x^2} (x - \ln(1+x)).$$

Řešení i)

Víme, že Maclaurův rozvoj funkce $\ln(1+x)$ je roven

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Odtud dostáváme vyjádření pro každé $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{x^2}(x - \ln(1+x)) &= \frac{1-x}{x^2} \left(x - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right) \right) \\ &= \frac{1-x}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \dots \right) \\ &= (1-x) \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + \dots \right) \\ &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+2}. \end{aligned}$$

Nyní položme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+2}$. Poloměr konvergence této řady je $R = 1$. Tedy funkce $S(x)$ je definována na intervalu $(-1, 1)$ a je spojitou funkcí. Tudíž můžeme psát

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{x^2}(x - \ln(1+x)) &= \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)S(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1-x) \lim_{x \rightarrow 0} S(x) \\ &= (1-0)S(0) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Příklad (j). Užitím předchozích limit určete limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - e \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} \right).$$

Řešení j)

Nejdříve upravme daný výraz:

$$\begin{aligned}
n \left(1 - e \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} \right) &= n \left(1 - e \cdot e^{\ln \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1}} \right) \\
&= n \left(1 - e \cdot e^{\frac{\ln \frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1}}}{1}} \right) \\
&= n \left(1 - e \cdot e^{\frac{\ln \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}}{1}} \right) \\
&= -n \left(e^{\frac{1 + \ln \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}}{1}} - 1 \right) \\
&= -n \left(1 + \ln \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}} \right) \cdot \frac{e^{\frac{1 + \ln \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}}{1}} - 1}{1 + \ln \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}} \\
&= -n \left(1 - (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \right) \cdot \frac{e^{\frac{1 + \ln \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}}{1}} - 1}{1 + \ln \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}} \\
&= -n(n+1) \left(\frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \right) \cdot \frac{e^{\frac{1 + \ln \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}}{1}} - 1}{1 + \ln \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}}
\end{aligned}$$

Dále platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \ln \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}} \right) = 1 + \ln \frac{1}{e} = 0.$$

Odtud pak plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1 + \ln \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}}{1}} - 1}{1 + \ln \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Nyní uvažujme funkci $f(x) = \frac{1-x}{x^2}(x - \ln(1+x))$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$f(1/(n+1)) = n(n+1) \left(\frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \right).$$

Potom platí:

$$\frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f \left(\frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(n+1) \left(\frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \right).$$

Konečně, z výše uvedených výpočtů plyne, že

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - e^{\left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} -n(n+1) \left(\frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \right) \cdot \frac{e^{1+\ln 2}}{1+\ln 2} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

