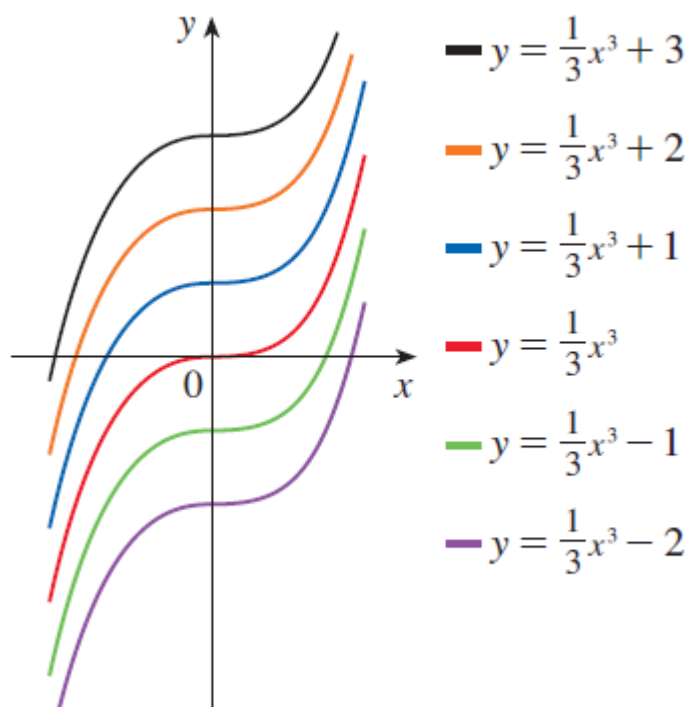


Primitivní funkce

Definice. Funkce F se nazývá **primitivní funkcí k funkci f na intervalu I** , jestliže pro každé $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Příklad. Uvažujme funkci $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem $f(x) = x^2$. Potom je funkce $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Potom pro každé $x \in (-\infty, \infty)$ $F'(x) = x^2 = f(x)$. Dále uvažujme funkci $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$. Funkce G je také primitivní funkcí k funkci f neboť pro každé $x \in (-\infty, \infty)$. Obecněji, je-li $C \in \mathbb{R}$ libovolná konstanta a H je funkce definovaná předpisem $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, potom je funkce H primitivní funkcí k funkci f .



Věta. Je-li F_0 primitivní funkcí k funkci f na intervalu I , potom je obecný tvar primitivní funkce:

$$F(x) = F_0(x) + C,$$

kde C je libovolná konstanta.

Tato věta je důsledkem následující věty:

Věta. Předpokládejme, že pro každé $x \in I$ platí:

$$F'(x) = G'(x).$$

Potom platí na intervalu I , že rozdíl $F - G$ je konstantní funkcí.

Důkaz. Jedná se o důsledek tzv. Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Zřejmě pro každé $x \in I$ platí:

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = 0.$$

Odtud plyne, že existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in I$ je $F(x) - G(x) = C$. $\square$

Příklad. Již dříve jsme vypočítali derivaci

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0.$$

Podle předchozí věty je obecná primitivní funkce funkce

$$F(x) = \ln |x| + C$$

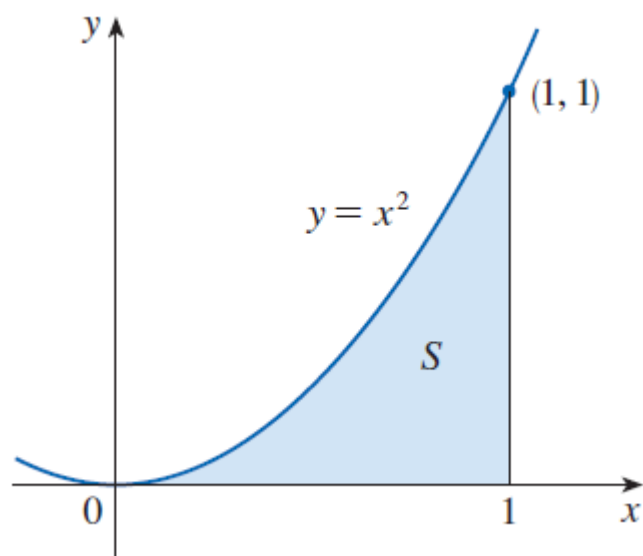
na libovolném intervalu I neobsahujícím bod $x = 0$. Zvláště na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Integrály

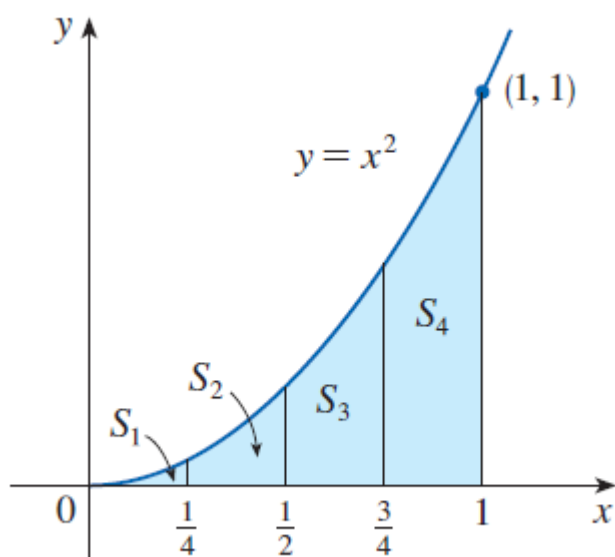
Problém výpočtu obsahu

Poznámka. Prvním vážným příkladem míry je tzv. **Jordan-Peanova míra**, pojmenovaná podle matematiků Camilla Jordana a Guiseppe Peana. Později francouzský matematik Henri Lebesgue přišel s obecnějším pojmem míry, kterou dnes nazýváme **Lebesgueovou mírou**.

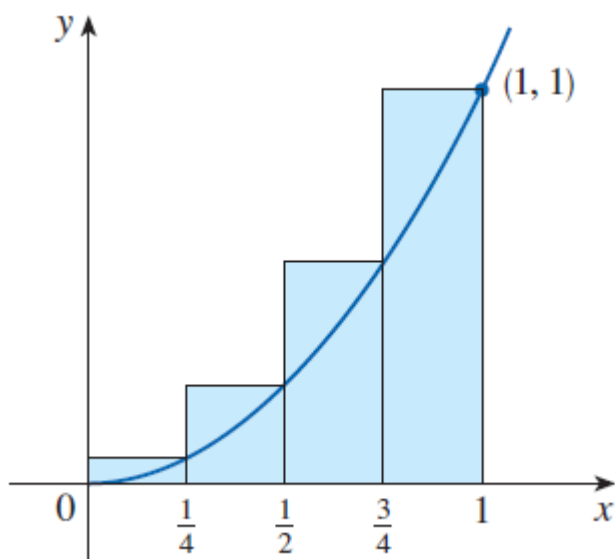
Uvažujme rovinný obrazec S , který je zobrazen na obrázku a jehož obrázek vidíme dole.



Nyní rozdělme obrazec na části pomocí vertikálních přímek $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$. Viz obrázek níže.



Dále každý křivočarý lichoběžník S_1 , S_2 , S_3 a S_4 nahradíme obdélníkem jak ukazuje následující obrázek.



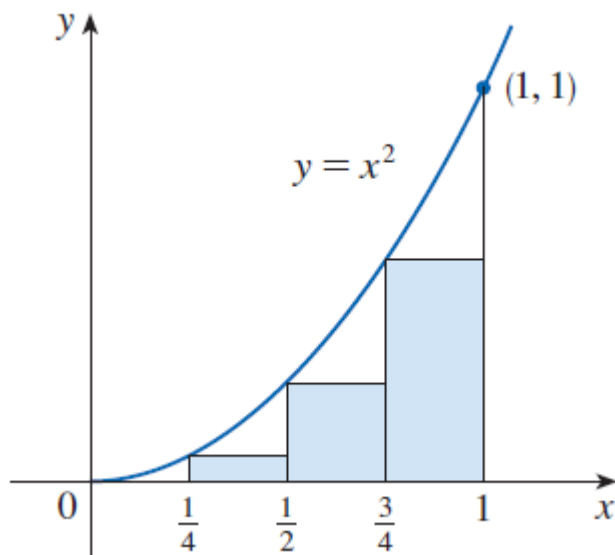
Interval jsem rozdělili na čtyři intervaly o stejné délce: $\langle 0, \frac{1}{4} \rangle$, $\langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \rangle$, $\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \rangle$ a $\langle \frac{3}{4}, 1 \rangle$. Výška každého obdélníka, který aproximuje obrazec S_i je rovna funkční hodnotě funkce $f(x)$ v pravém koncovém bodě příslušného dílčího intervalu tvořícího základnu obdélníka. Tedy každý z těchto obdélníků má šířku $\frac{1}{4}$ a výšky jsou postupně rovny $\left(\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{4}\right)$ a 1^2 . Necht' R_4 označuje součet obsahů jednotlivých obdélníků, tedy

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot (1)^2 = \frac{15}{32}.$$

Z obrázku nahoře je zřejmé, že obsah A obrazce S je menší než R_4 , tedy

$$A < \frac{15}{32}.$$

Nyní aproximujme obrazec S pomocí obdélníků, jejichž výška bude tentokrát rovna funkční hodnotě funkce $f(x) = x^2$ v levém koncovém bodě každého dílčího intervalu $\langle 0, \frac{1}{4} \rangle$, $\langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \rangle$, $\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \rangle$ a $\langle \frac{3}{4}, 1 \rangle$. Viz následující obrázek:



Součet obsahů jednotlivých aproximujících obdélníků je analogicky roven:

$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32}.$$

Takto jsme dostali dolní odhad obsahu obrazce S . Platí:

$$\frac{7}{32} < A < \frac{15}{32}.$$

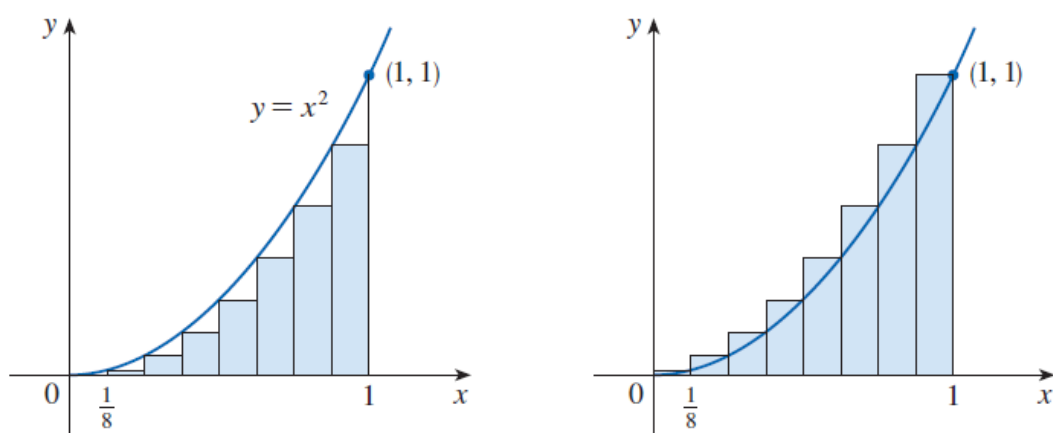
Je samozřejmě možné zopakovat výpočet pro jemnější aproximaci obrazce pomocí více dílčích intervalů. Například, pokud zdvojnásobíme počet aproximujících obdélníků, dosataneme odhady:

$$0.2734375 < A < 0.3984375$$

Ještě přesnější odhady dostaneme postupným zvětšováním počtu aproximujících obdélníků. Viz následující tabulka:

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

Na následujícím obrázku vidíte aproximaci obrazce pro počet $n = 8$.



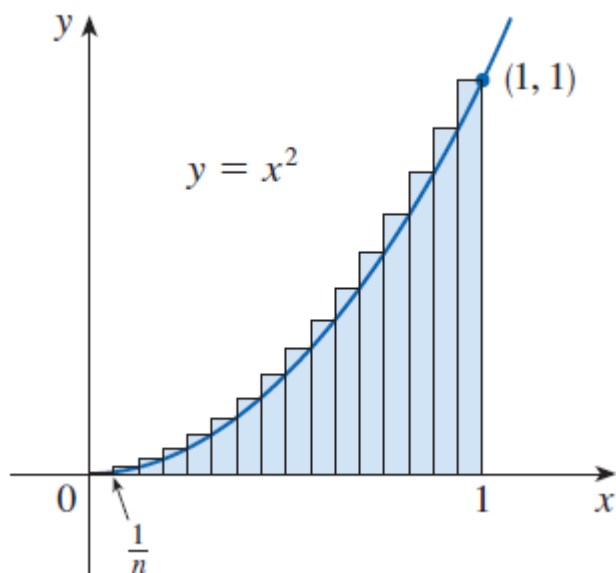
Ukažme dále, že pro $n \rightarrow \infty$ posloupnost (R_n) konverguje a platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}.$$

K výpočtu použijeme vzorec pro výpočet sumy kvadrátů přirozených čísel:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Tento vzorec můžete zkusit dokázat matematickou indukcí. R_n bude označovat pro $n \in \mathbb{N}$ součet obsahů obdélníků tvořících horní aproximaci obrazce



$$R_n = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n}\right)^2 \quad (2)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \quad (3)$$

$$= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2). \quad (4)$$

Použitím výše uvedené sumační formule dostaneme:

$$R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Potom přechodem k limitě dostaneme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \quad (5)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{2n+1}{n}\right) \quad (6)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \quad (7)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}. \quad (8)$$

Podobným způsobem lze ukázat, že

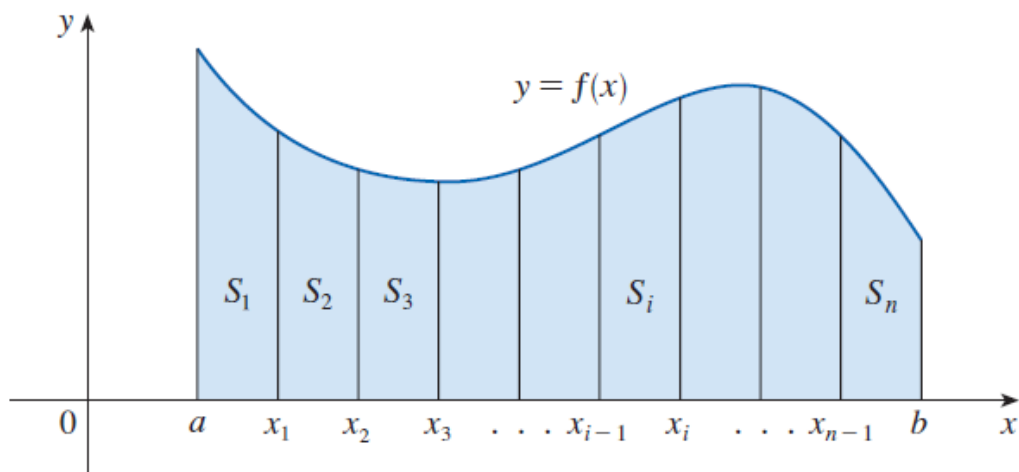
$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{1}{3}.$$

Nyní dává smysl definovat obsah A obrazce S jako limitu:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{1}{3}.$$

Zobecnění předchozího příkladu

Uvažujme nezápornou spojitou funkci $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a uvažujme obrazec S omezený grafem funkce f , osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$. Viz obrázek níže



Rozdělme obrazec na části $S_1, S_2, \dots, S_n$ příslušné dílčí intervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ mají konstantní délku $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Šířka každého pruhu S_i je tedy rovna Δx . Dílčími intervaly jsou intervaly:

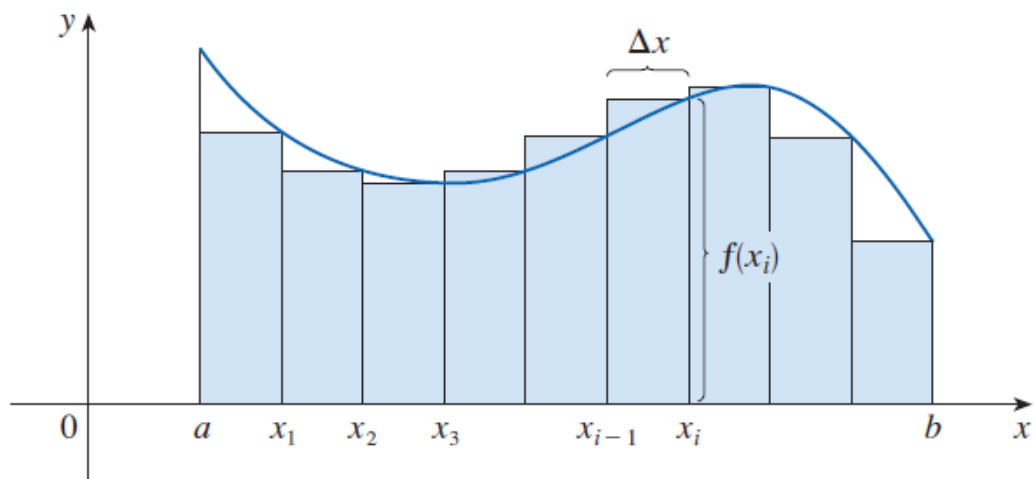
$$\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_2, x_3 \rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle,$$

kde $x_0 = a$ a $x_n = b$. Pravé koncové body dílčích intervalů lze vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} x_1 &= a + \Delta x, \\ x_2 &= a + 2\Delta x, \\ x_3 &= a + 3\Delta x, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Obecně $x_i = a + i\Delta x$. Obsah každého dílčího obrazce aproximujeme obsahem obdélníka jehož šířka je rovna Δx a výška je rovna funkční hodnotě v pravém koncovém bodě příslušného dílčího intervalu $f(x_i)$. Obsah i -tého obdélníku je tedy roven součinu $f(x_i)\Delta x$. Konečně obsah obrazce S budeme aproximovat pomocí sumy R_n obsahů jednotlivých obdélníků:

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$



Definice. Obsah A obrazce S omezeného grafem spojitě funkce f budeme definovat jako limitu:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x].$$

Poznámky.

1. Je možné ukázat, že díky předpokladu spojitosti funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ limita $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n$ vždy existuje.
2. Lze též ukázat, že pokud použijeme levé koncové body dílčích intervalů, potom

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x].$$

3. Místo levých resp. pravých koncových bodů můžeme vybrat body $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, kde pro každé i je $x_i^* \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Potom lze obsah A obrazce S vyjádřit pomocí obecnější limity:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x \right].$$

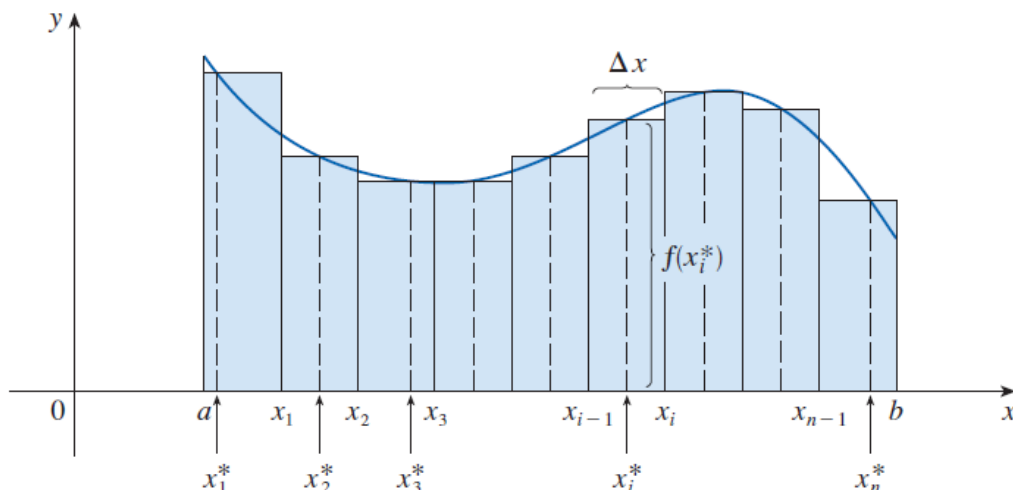
Viz obrázek dole. 4. Vzhledem ke spojitosti funkce f na každém z dílčích intervalů lze pro každé i volit výběrový bod $x_i^* \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ tak, že $f(x_i^*) = \min_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x)$.

Dostaneme tak tzv. **dolní integrální součet**, který je dolním odhadem obsahu A .

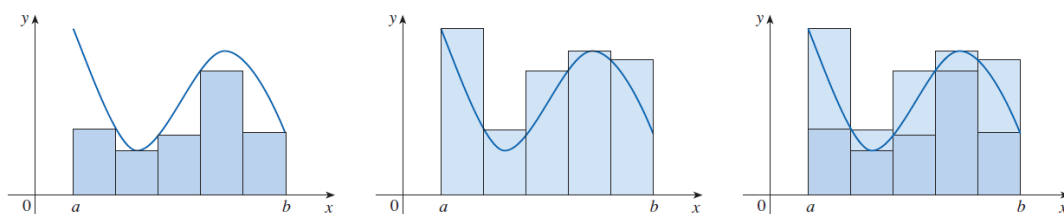
Analogicky lze definovat **horní integrální součet**, který je horním odhadem obsahu A obrazce S .

Označení. Obsah A budeme značit symbolem

$$\int_a^b f(x)dx.$$



Ekvivalentní definice obsahu A . Obsah obrazce S je jednoznačně definovaná hodnota A , větší než libovolný dolní integrální součet a menší než libovolný horní integrální součet.



In []:

```
"""
Vytvořme funkci, která má jako parametry funkci f, interval [a,b], počet dílčích
intervalů ekvidistantního dělení intervalu [a,b]
a vrací aproximaci integrálu funkce f na intervalu [a,b] pomocí Riemannova integ
"""

import sympy as sp

x = sp.Symbol('x')
import numpy as np
from IPython.display import display, Math, Latex # pro zobrazení matematických v

def ziskejDilciIntervaly(a, b, n):
    """
    Funkce vrací seznam dílčích intervalů ekvidistantního dělení intervalu [a,b]
    """
    dilciBody = np.linspace(a, b, n + 1)
    dilciIntervaly = []
    for i in range(n):
        dilciIntervaly.append((dilciBody[i], dilciBody[i + 1]))
    return dilciIntervaly

# testujme funkci ziskejDilciIntervaly
# a = 0
# b = 5
# n = 10
# dilciIntervaly = ziskejDilciIntervaly(a, b, n)
# print(dilciIntervaly)
```

```

def ziskejRiemannuvIntegSoucet(f, a, b, n):
    """
    Funkce vypočítá aproximaci integrálu funkce f na intervalu [a,b] pomocí
    Riemannova integrálního součtu. Funkce f je zadána jako parametr funkce,
    interval [a,b] je zadán parametry a a b, počet dílčích intervalů ekvidistant
    dělení intervalu [a,b] je zadán parametrem n.
    """

    dilciIntervaly = ziskejDilciIntervaly(a, b, n)
    print(dilciIntervaly)
    soucet = 0
    for interval in dilciIntervaly:
        # vypočteme střed intervalu a hodnotu funkce v tomto bodě
        stredIntervalu = (interval[0] + interval[1]) / 2
        # evaluujeme funkci f v bodě stredIntervalu symbolicky ne numericky (tj.
        hodnotaFunkce = f.subs(x, stredIntervalu)
        print(f"hodnota funkce v bodě {stredIntervalu} je {hodnotaFunkce}")
        # vypočteme délku intervalu
        delkaIntervalu = interval[1] - interval[0]
        # přičteme k součtu hodnotu funkce v bodě středu intervalu násobenou délkou
        soucet += hodnotaFunkce * delkaIntervalu
    # print(f"Riemannův integrální součet je {soucet}")
    display(Math(r"\sigma(%s) = %g" % (sp.latex(f), soucet)))
    return soucet

# testujme funkci ziskejRiemannuvIntegSoucet
f = sp.sin(x)
a = 0
b = 5
n = 10
ziskejRiemannuvIntegSoucet(f, a, b, n)

```

```

[(0.0, 0.5), (0.5, 1.0), (1.0, 1.5), (1.5, 2.0), (2.0, 2.5), (2.5, 3.0), (3.0, 3.5), (3.5, 4.0), (4.0, 4.5), (4.5, 5.0)]
hodnota funkce v bodě 0.25 je 0.247403959254523
hodnota funkce v bodě 0.75 je 0.681638760023334
hodnota funkce v bodě 1.25 je 0.948984619355586
hodnota funkce v bodě 1.75 je 0.983985946873937
hodnota funkce v bodě 2.25 je 0.778073196887921
hodnota funkce v bodě 2.75 je 0.381660992052332
hodnota funkce v bodě 3.25 je -0.108195134530108
hodnota funkce v bodě 3.75 je -0.571561318742344
hodnota funkce v bodě 4.25 je -0.894989358228583
hodnota funkce v bodě 4.75 je -0.999292788975378

```

$\sigma(\sin(x)) = 0.723854$

Out[]: 0.72385443698561

Příklad. Necht' A obsah plochy obrazce omezeného grafem funkce $f(x) = e^{-x}$ v mezích $x = 0$ a $x = 2$

(a) Vyjádřeme A jako limitu Riemannových intergálních součtů a kde výběrové body budou pravé koncové body dílčích intervalů. Tuto limitu nepočítejme.

(b) Odhadněme A pomocí Riemannova integrálního součtu, kde výběrové body budou středy dílčích intervalů. Použijme 10 dílčích intervalů.

Řešení. (a) $A = \int_0^2 e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{-x_i} \Delta x_i$ kde $x_i = \frac{2i}{n}$ a $\Delta x_i = \frac{2}{n}$

Nyní dosadíme $\frac{2i}{n}$ za x_i ve výše uvedené sumě:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{2i}{n}} \frac{2}{n} =$$

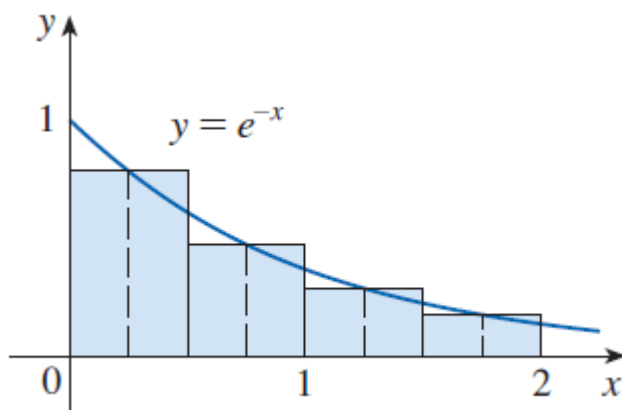
Rozepíšme poslední sumu:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^{-2/n} \left(\frac{2}{n} \right) + e^{-4/n} \left(\frac{2}{n} \right) + \dots + e^{-2(n)/n} \left(\frac{2}{n} \right) \right].$$

Po úpravě dostaneme limitu ve tvaru:

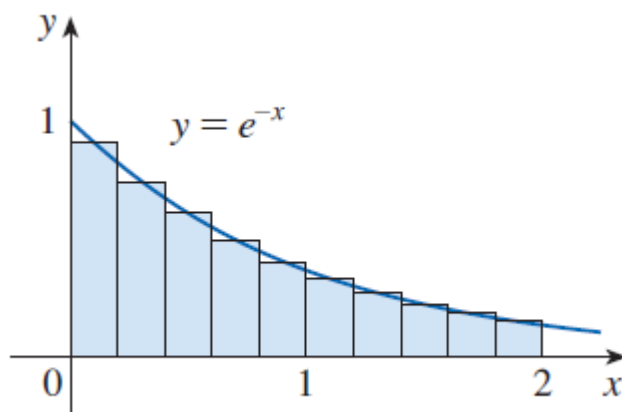
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[e^{-2/n} + e^{-4/n} + \dots + e^{-2(n)/n} \right] = \int_0^2 e^{-x} dx.$$

Na obrázku níže vidíme graf funkce e^{-x} v intervalu $[0, 2]$ pro čtyři dílčí intervaly.



(b) Vyčísleme Riemannův integrální součet pro 10 dílčích intervalů. Výběrové body budou tentokrát středy intervalů, tedy $x_i = 0.1 + 0.2i$ pro $i = 0, 1, \dots, 9$. Výsledek je

$$\begin{aligned} M_{10} &= \sum_{i=1}^{10} f(x_i) \cdot \Delta x = f(0.1)\Delta x + f(0.3)\Delta x + \dots + f(1.9)\Delta x = \\ &= 0.2(e^{-0.1} + e^{-0.3} + e^{-0.5} \dots + e^{-1.9}) \approx 0.8632. \end{aligned}$$



Určitý integrál

Úvod

Definice. Necht' f je funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Dále uvažujme dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ na n podintervalů o délce $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Necht' $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x$, atd. a $x_n = b$.

Body $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ jsou tzv. **výběrové body**. Platí: $x_i^* \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Určitý integrál se vypočítá jako limita:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

za předpokladu, že uvedená limita existuje a nezávisí na výběru výběrových bodů. Potom říkáme, že funkce f je **integrabilní** na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Poznámka. Význam uvedené limity lze přesně definovat takto: Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje N_ε takové, že pro každé $n > N_\varepsilon$ platí:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

pro libovolný výběr výběrových bodů $x_i^* \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$.

Věta. Pokud je funkce f integrabilní na intervalu $\langle a, b \rangle$, potom je integrál na tomto intervalu jednoznačně daný.

Věta. Pokud je funkce f integrabilní na intervalu $\langle a, b \rangle$, potom je omezenou funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Poznámka. Předchozí nelze obrátit. To znamená, že existují funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, které jsou omezené, ale nemají Riemannův integrál od a do b .

Příkladem může být tzv. Dirichletova funkce.

Historická poznámka k definici integrálu. Integrální součet ve tvaru

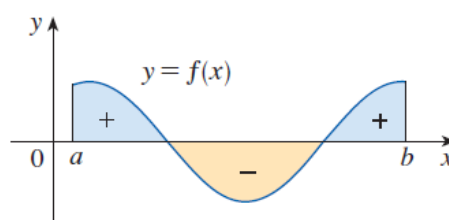
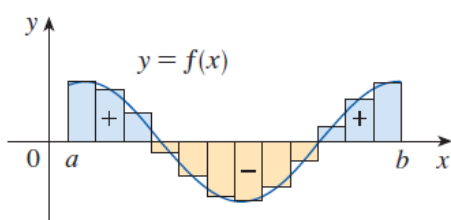
$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

byla zavedena německým matematikem Bernhardem Riemannem (1826-1866) v roce 1859. Bernhard Riemann získal doktorát pod vedením legendárního Gausse na univerzitě v Göttingenu. a zůstal tam učit. Gauss, který neměl ve zvyku chválit jiné matematiky, mluvil o Riemannově "tvůrčí, aktivní, skutečně duchaplné práci". Také o matematické myšli, úžasné plodné a originální. Definice integrálu, kterou používáme, je zásluhou Riemanna. Významně přispěl také k teorii funkcí a komplexní proměnné, matematické fyzice, teorii čísel a základům geometrie. Riemannův široký záběr pojetí prostoru a geometrie se ukázalo být tím správným prostředím, o 50 let později pro Einsteinovu obecnou teorii. teorie relativity. Riemannovo zdraví bylo po celý život špatné a zemřel na tuberkulózu ve věku 39 let.

Niní již víme, že pokud je funkce f na intervalu $[a, b]$ kladná, tak je její integrál je roven obsahu plochy pod grafem funkce f na intervalu $[a, b]$. Jestliže funkce f nabývá na intervalu $[a, b]$ kladných i záporných hodnot, pak je její integrál roven rozdílu obsahu plochy pod grafem funkce f a obsahu plochy nad grafem funkce f na intervalu $[a, b]$. Tedy

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2,$$

kde A_1 je obsah plochy nad grafem funkce f a A_2 je obsah plochy pod grafem funkce f .



Příklad: Vyčíslíme Riemannův integrální součet pro funkci $f(x) = x^3 - 6x$, kde x je v intervalu $\langle 0, 3 \rangle$. Necht' $n = 6$ a použijme výběrové body, které budou pravé koncové body dílčích intervalů.

Řešení: Je-li $n = 6$, tak je $\Delta x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Výběrové body jsou tedy $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = 2, x_5 = \frac{5}{2}, x_6 = 3$.

Tedy Riemannův integrální součet pro funkci $f(x) = x^3 - 6x$, kde $x \in [0, 3]$ je:

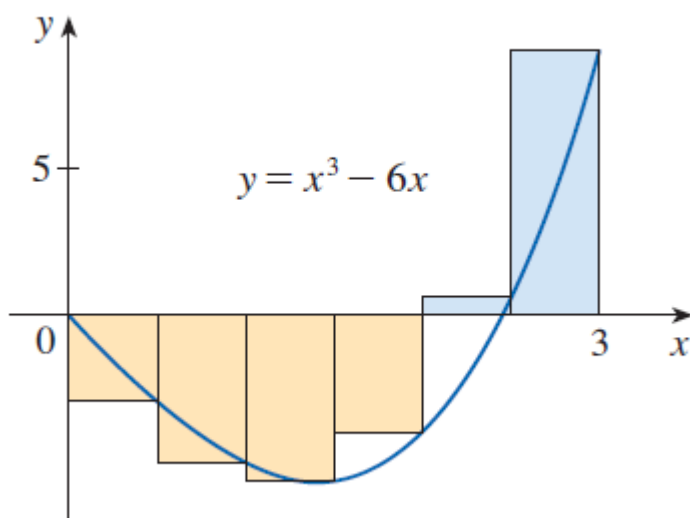
$$R_6 = \sum_{i=1}^6 f(x_i) \Delta x \quad (9)$$

$$= f(0.5) \Delta x + f(1) \Delta x + f(1.5) \Delta x + f(2) \Delta x + f(2.5) \Delta x + f(3) \Delta x \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} (-2.875 - 5 - 5.625 - 4 + 0.625 + 9) \quad (11)$$

$$= -3.9375. \quad (12)$$

Všimněme si, že hodnota Riemannova integrálního součtu je záporná. Je záporná proto, že hodnota integrálního součtu je součtem obsahů modrých obdélníků minus součet obsahů žlutých obdélníků. Viz obrázek níže.



Věta (Postačující podmínka integrability). Je-li funkce $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je funkce f integrabilní na $\langle a, b \rangle$, tj. určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$ existuje.

Poznámka. Opačné tvrzení ovšem neplatí. To znamená, že z existence určitého integrálu $\int_a^b f(x) dx$ neplyne spojitost funkce f .

Věta. Je-li funkce $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilní na $\langle a, b \rangle$, pak platí:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x,$$

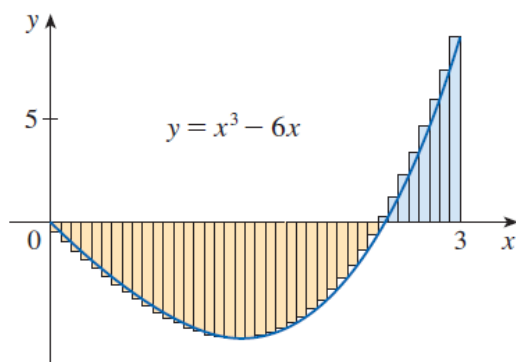
kde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ a $x_i = a + i\Delta x$.

Příklad. Vypočítejme podle definice určitý integrál $\int_0^3 (x^3 - 6x) dx$.

Řešení. Rozdělíme interval $\langle 0, 3 \rangle$ na n podintervalů délky $\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$ a spočítáme hodnoty $f(x_i)$ na koncích těchto podintervalů. Poté spočítáme součet těchto hodnot a vynásobíme jej délkou Δx .

Pro vyjádření integrálního součtu využijeme pravé koncové body podintervalů, tj. $x_i = 0 + i\Delta x = i\Delta x$. Poté dostaneme:

$$\begin{aligned}
\int_0^3 (x^3 - 6x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{3i}{n} \right)^3 - 6 \left(\frac{3i}{n} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^n i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^n i \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{81}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \frac{54}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{81}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 - 27 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\
&= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6.75.
\end{aligned}$$



n	R_n
40	-6.3998
100	-6.6130
500	-6.7229
1000	-6.7365
5000	-6.7473

Základní vlastnosti určitého integrálu

Především, že integrál $\int_a^b f(x) dx$ byl definován za předpokladu, že platí $a < b$. Definice ovšem dává smysl i pro případ, kdy $a > b$. Tedy integrál $\int_b^a f(x) dx$ budeme definovat vztahem:

$$\boxed{\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.}$$

Dále definujeme pro případ, kdy je $a = b$:

$$\boxed{\int_a^a f(x) dx = 0.}$$

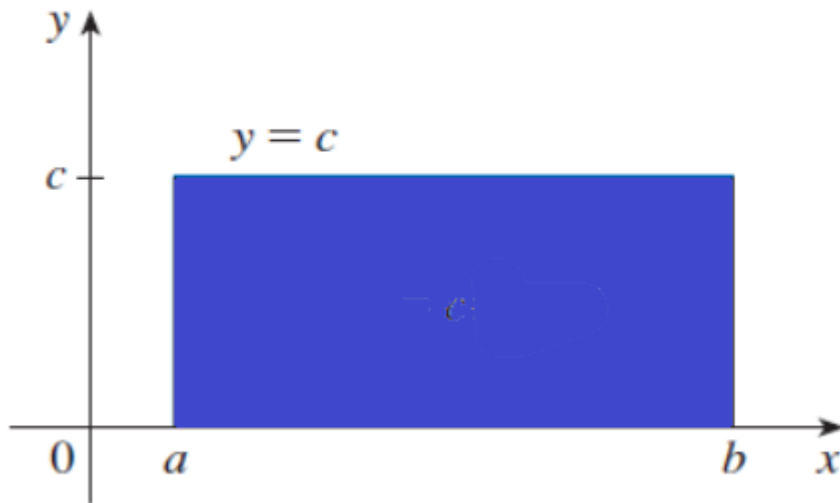
Věta.

- $\int_a^b c dx = c(b - a)$, kde c je libovolná konstanta.
- $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

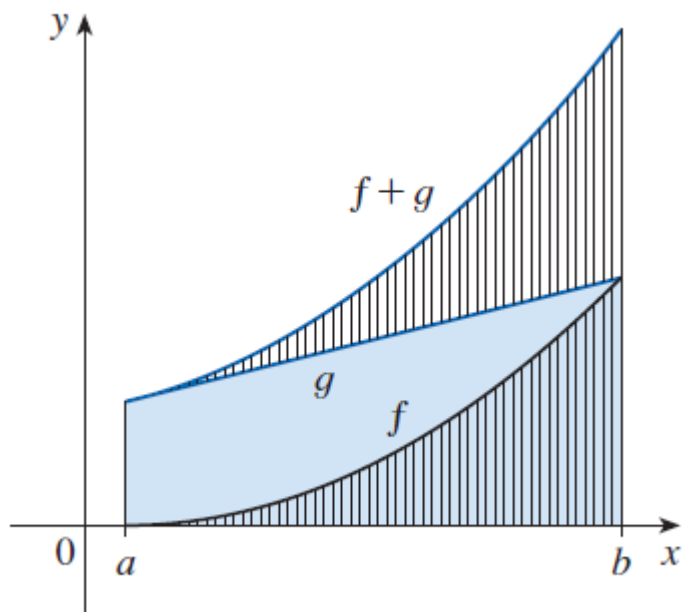
$$3. \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

$$4. \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Poznámka. Integrál v bodu 1. vyjadřuje obsah obdélníku o stranách c a $b - a$. Viz obrázek.



Následující obrázek ilustruje vlastnost 2. z předchozí věty:



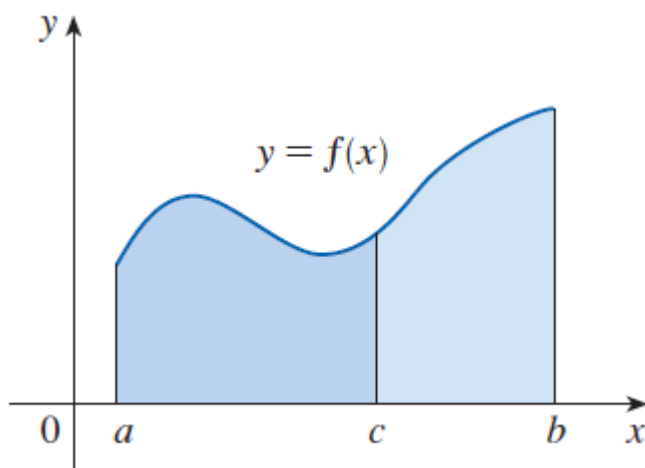
Aditivitu integrálu (vlastnost 2) lze odvodit následovně:

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) + g(x_i)] \Delta x \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x + \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x \\
&= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.
\end{aligned}$$

Věta.

5.

$$\boxed{\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.}$$



Věta. Má-li funkce $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$, pak je-li $\langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle$, pak existuje i integrál $\int_c^d f(x) dx$.

Nyní zobecněme předchozí větu:

Věta. Necht' $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, která má určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$. Dále necht' $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \langle a, b \rangle$ je libovolná množina reálných čísel. Potom platí:

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x) dx = \int_\alpha^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx,}$$

kde z existence libovolných dvou uvedených integrálů plyne existence třetího z integrálů a uvedená rovnost.

Příklad. Předpokládejme, že známe integrály $\int_0^{10} f(x) dx = 17$ a $\int_0^8 f(x) dx = 12$. Potom najděme hodnotu integrálu $\int_8^{10} f(x) dx$.

Řešení. V důsledku vlastnosti 5. nacházíme:

$$\int_0^8 f(x)dx + \int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx.$$

$$\int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^8 f(x)dx = 17 - 12 = 5.$$

Věta.

6. Pokud je f integrabilní na intervalu $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$, potom je

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

7. Pokud jsou funkce f a g integrabilní na intervalu $[a, b]$, $f(x) \geq g(x)$ na $[a, b]$, potom je $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

8. Pokud je f integrabilní na intervalu $[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$ na $[a, b]$, potom je

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

9. Je-li f integrabilní na intervalu $[a, b]$, pak

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

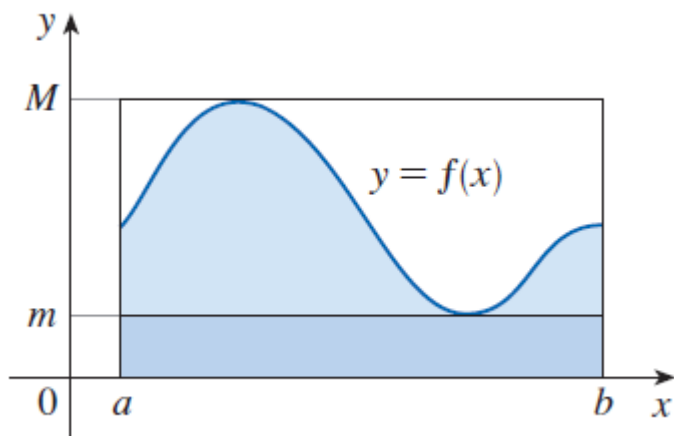
Ad 7.) Pokud na intervalu $\langle a, b \rangle$ platí: $f(x) \geq g(x)$, pak platí také, že $f(x) - g(x) \geq 0$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Z vlastnosti (6) pak plyne, že

$$0 \leq \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

Odtu pak plyne, že

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Poznámka. Vlastnost 8. je ilustrována na obrázku níže.



Příklad: Využijme vlastnost 8. a odhadněme hodnotu integrálu:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Řešení: Funkce v integrandu $f(x) = e^{-x^2}$ je v intervalu $[0, 1]$ klesající, absolutní maximum je $M = f(0) = e^0 = 1$. Absolutní minimum je $m = f(1) = e^{-1}$. Využijeme vlastnost 8. a odhadneme hodnotu integrálu:

$$e^{-1}(1 - 0) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq e^0(1 - 0) \quad (13)$$

$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq e^0 = 1. \quad (14)$$

Protože je $e^{-1} \approx 0.3679$ a $e^0 = 1$, odhad hodnoty integrálu je $0.3679 \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$.

Postačující podmínky existence integrálu

Cauchyovo kritérium integrability

Věta (Cauchyovo kritérium integrability): Necht' $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená funkce. Funkce f je Riemannovsky integrabilní právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolná dvě dělení P_1 a P_2 intervalu $\langle a, b \rangle$ taková, že délka dílčích intervalů P_1 a P_2 je menší než δ , platí

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(y_i^*) \Delta y_i \right| < \varepsilon,$$

kde x_i^* a y_i^* jsou libovolné body v dílčích intervalech $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a $\langle y_{i-1}, y_i \rangle$ příslušných dělení P_1 a P_2 . Zde x_i resp. y_i jsou konce dílčích intervalů dělení P_1 resp. P_2 a $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ resp. $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ jsou délky dílčích intervalů dělení P_1 resp. P_2 .

Věta. Je-li $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak existuje integrál $\int_a^b f(x) dx$.

Věta. Je-li $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ monotónní funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak existuje integrál $\int_a^b f(x) dx$.

Definice. Řekneme, že množina $N \subset \mathbb{R}$ má (Lebesgueovu) míru nula, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje posloupnost intervalů $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$. Zde $|I_n|$ značí délku intervalu I_n .

Lebesgueovo kritérium pro existenci integrálu

Věta (Lebesgueovo kritérium). Omezená funkce $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ má Riemannův určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$ právě tehdy, když množina bodů, kde je funkce nespojitá, má míru nula.

Příklad. Uvažujme funkci $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Množina bodů nespojitosti je $N = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, která má míru nula. Tedy funkce f má Riemannův určitý integrál.

Fundamentální věta integrálního počtu, první část

Věta (Newton-Leibnizův vzorec). Předpokládejme, že f a F jsou dvě funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$ takové, že platí následující podmínky:

- (a) F je spojitou funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$,
- (b) $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$,
- (c) f je integrabilní na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Potom platí:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).}$$

Důkaz. Necht' $\varepsilon > 0$ a necht' existuje určitý integrál $\int_a^b f(x) dx = I$. Potom existuje $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq N_\varepsilon$ platí:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon \quad (1)$$

pro libovolný výběr výběrových bodů $x_i^* \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$.

Pokud budeme na každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ aplikovat Lagrangeovu větu o střední hodnotě, dostaneme:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(x_i^*) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad \text{pro všechna } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ tedy platí: $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$. Protože $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$, dostaneme: $F'(x_i^*) = f(x_i^*)$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$.

Sečtením všech rovnic dostaneme:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n F'(x_i^*) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Pokud nyní ve vztahu (1) dosadíme za $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$ výraz $F(b) - F(a)$, dostaneme:

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Protože jsme na začátku volili $\varepsilon > 0$ libovolně, dokázali jsme takto existenci integrálu $\int_a^b f(x) dx$ a zároveň, že

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Důkaz je tedy dokončen. $\square$

Příklad: Ukažme, že $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Řešení: Funkce $f(x) = x^2$ je integrabilní na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Dále uvažujme funkci $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Funkce F je spojitá na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (0, 1)$. Proto platí:

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Příklad. Uvažujme funkci $H(x) = 2\sqrt{x}$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Funkce H je spojitá na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a $H'(x) = 1/\sqrt{x}$ pro všechna $x \in (0, 1)$. Dále uvažujme funkci $h : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že $h(x) = 1/\sqrt{x}$ pro všechna $x \in (0, 1)$ a $h(0) = 0$. Funkce h potom není integrabilní na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ neboť zde není omezenou funkcí. V tomto případě tedy nelze použít fundamentální větu integrálního počtu.

Pokud bychom dosadili do tzv. Newton-Leibnizova vzorce, pak bychom na pravé straně dostali:

$$H(1) - H(0) = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2.$$

Fundamentální věta integrálního počtu, druhá část

Věta. Necht' funkce $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ má Riemannův určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$. Necht' F je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$ předpisem

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Potom je funkce F spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a navíc platí, že pokud pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ je $|f(x)| \leq M$, pak funkce F je Lipschitzovsky spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ s konstantou M . Tj. pro každé $s, t \in \langle a, b \rangle$ platí:

$$|F(s) - F(t)| \leq M|s - t|.$$

Věta. Předpokládejme, že f je integrabilní na intervalu $\langle a, b \rangle$ a necht' je funkce f spojitá v bodě $c \in \langle a, b \rangle$. Dále pro každé $t \in \langle a, b \rangle$ položme $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Potom platí, že funkce $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je v bodě c diferencovatelná a platí:

$$F'(c) = f(c).$$

Důkaz. Necht' $c \in (a, b)$ a necht' $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\eta_\varepsilon > 0$ takové, že pro všechna $x \in \langle c, c + \eta_\varepsilon \rangle$ platí:

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon.$$

Nyní necht' h splňuje $0 < h < \eta_\varepsilon$. Potom z tzv. intervalové aditivity plyne:

$$F(c+h) = \int_a^{c+h} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{c+h} f(x) dx = F(c) + \int_c^{c+h} f(x) dx.$$

Odtud plyne:

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(x) dx.$$

Na intervalu $\langle c, c+h \rangle$ tedy platí:

$$(f(c) - \varepsilon) \cdot h \leq F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(x) dx \leq (f(c) + \varepsilon) \cdot h.$$

Vydělením předchozích nerovností $h > 0$ dostaneme:

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| \leq \varepsilon.$$

Nyní z definice limity zprava plyne:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Obdobně se dokáže pro limitu zleva, že

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Tudíž platí:

$$F'(c) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Důkaz je tedy dokončen. $\square$

Důsledek. Pokud f je spojitou funkcí na intervalu (a, b) , potom k funkci f existuje na intervalu (a, b) primitivní funkce F taková, že $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$.

Následující příklad ukazuje, že předchozí důsledek dává postačující a nikoliv nutnou podmínku existence primitivní funkce F k funkci f na intervalu (a, b) .

Příklad. Klasickým příkladem diferencovatelné funkce s nespojitou derivací je funkce:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & \text{if } x \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Tato funkce je definována například na otevřeném intervalu $(-1, 1)$. Podívejme se, proč je tato funkce všude diferencovatelná, ale její derivace je nespojitá při $x = 0$. Pro $x \neq 0$ můžeme spočítat derivaci pomocí součinného pravidla a řetězového pravidla:

$$f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) + x^2 \cos(\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}).$$

Derivace jednoznačně existuje pro $x \neq 0$ a je spojitá všude kromě $x = 0$. Nyní uvažujme $x = 0$. Použijeme definici derivace, abychom zjistili, zda existuje:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin(\frac{1}{h}).$$

Protože $|\sin(\frac{1}{h})| \leq 1$ pro všechny $h \neq 0$, máme $|h \sin(\frac{1}{h})| \leq |h|$. Když $h \rightarrow 0$, dostaneme $h \sin(\frac{1}{h}) \rightarrow 0$, takže limita existuje a $f'(0) = 0$. Funkce je tedy všude diferencovatelná. Derivace je však nespojitá v bodě $x = 0$. Abychom se o tom přesvědčili, uvažujme limitu pro $x \rightarrow 0$ derivace pro $x \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin(\frac{1}{x}) + \cos(\frac{1}{x})). \quad (1)$$

Druhý člen, $\cos(\frac{1}{x})$, osciluje mezi -1 a 1 , když $x \rightarrow 0$, a první člen, $2x \sin(\frac{1}{x})$, se blíží 0 , když $x \rightarrow 0$. Limita neexistuje, když $x \rightarrow 0$, takže derivace $f'(x)$ je nespojitá pro $x = 0$.

Ukažme podrobněji proč předchozí limita (1) neexistuje. Chceme ukázat, že limita:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin(\frac{1}{x}) + \cos(\frac{1}{x}))$$

neexistuje. Ukážeme si, že pro konkrétní volbu ϵ nemůžeme najít δ , které by vyhovovalo.

Zvolme $\epsilon = \frac{1}{2}$. Předpokládejme, že limita existuje a je rovna L . Pak by měla existovat $\delta > 0$ taková, že pro všechna x s $0 < |x| < \delta$ máme:

$$\left| 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right) - L \right| < \epsilon = \frac{1}{2}.$$

Nyní uvažujme dvě posloupnosti bodů:

1. $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, kde $n \in \mathbb{N}$. V tomto případě máme:

$$2x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) + \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = 2\left(\frac{1}{2\pi n}\right) \sin(2\pi n) + \cos(2\pi n) = 1.$$

2. $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, kde $n \in \mathbb{N}$. V tomto případě máme:

$$2y_n \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) + \cos\left(\frac{1}{y_n}\right) = 2\left(\frac{1}{(2n+1)\pi}\right) \sin((2n+1)\pi) + \cos((2n+1)\pi) = -1.$$

Jakmile se $n \rightarrow \infty$, obě posloupnosti, x_n i y_n , konvergují k 0. Pro libovolné $\delta > 0$ můžeme najít dostatečně velké n , aby $0 < |x_n| < \delta$ a $0 < |y_n| < \delta$. Pro tyto x_n a y_n však platí:

$$\left| 2x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) + \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) - L \right| \geq |1 - L|$$

a

$$\left| 2y_n \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) + \cos\left(\frac{1}{y_n}\right) - L \right| \geq |-1 - L|$$

Protože jsme předpokládali, že limita existuje, měla by splňovat nerovnost s $\epsilon = \frac{1}{2}$ pro x_n i y_n . Ale $|1 - L|$ a $|-1 - L|$ nemohou být současně menší než $\frac{1}{2}$, protože jejich součet je roven 2. To vede ke sporu a docházíme k závěru, že limita neexistuje.

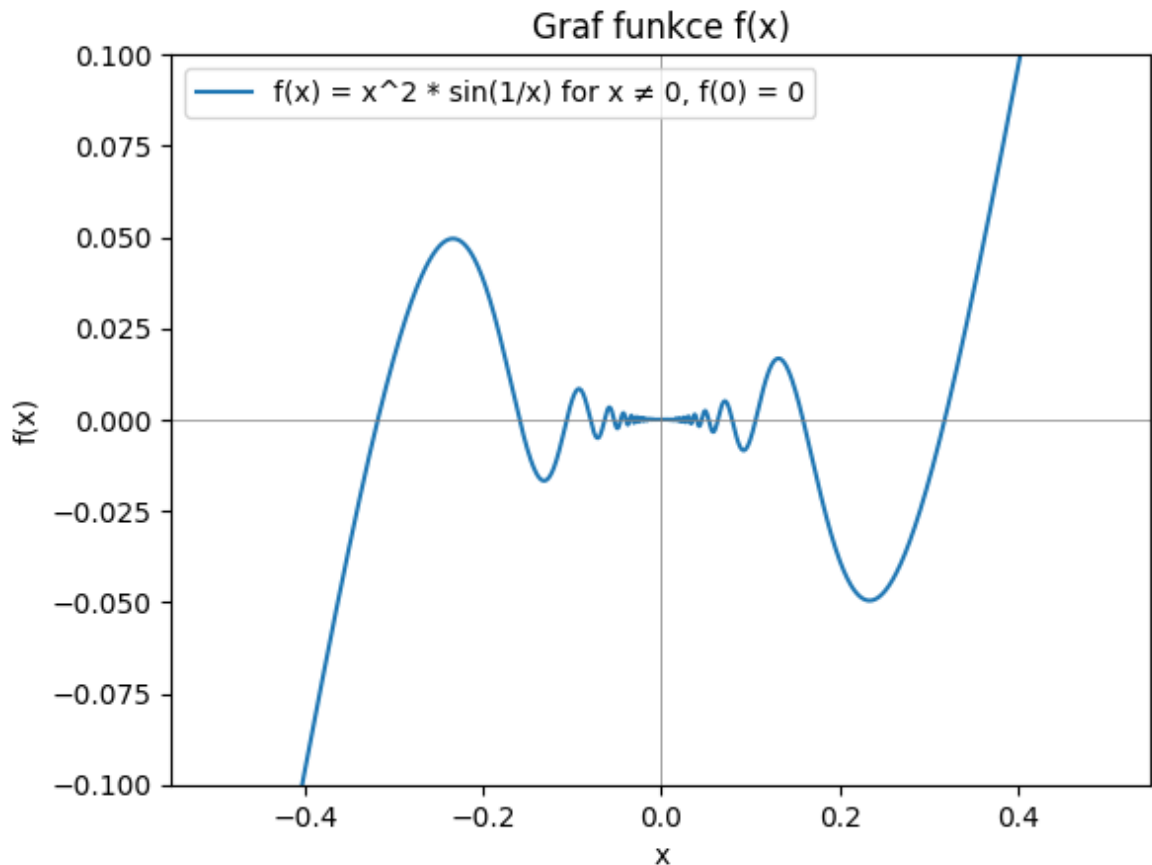
Proto je derivace $f'(x)$ nespojitá pro $x = 0$.

```
In [ ]: #@title
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return x**2 * np.sin(1/x) if x != 0 else 0

x = np.linspace(-0.5, 0.5, 1000)
y = np.vectorize(f)(x)

plt.plot(x, y, label='f(x) = x^2 * sin(1/x) for x ≠ 0, f(0) = 0')
plt.axvline(0, color='gray', linewidth=0.5)
plt.axhline(0, color='gray', linewidth=0.5)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.title('Graf funkce f(x)')
# nastavme rozsah osy y
plt.ylim(-0.1, 0.1)
plt.show()
```



```
In [ ]: #@title
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

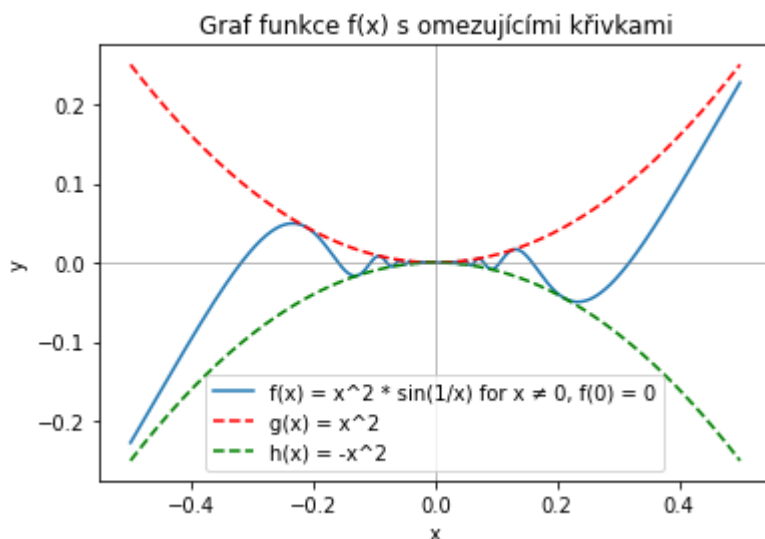
def f(x):
    return x**2 * np.sin(1/x) if x != 0 else 0

def g(x):
    return x**2

def h(x):
    return -x**2

x = np.linspace(-0.5, 0.5, 1000)
y_f = np.vectorize(f)(x) # vektorizace funkce f pro všechny prvky vektoru x
y_g = np.vectorize(g)(x)
y_h = np.vectorize(h)(x)

plt.plot(x, y_f, label='f(x) = x^2 * sin(1/x) for x ≠ 0, f(0) = 0')
plt.plot(x, y_g, linestyle='dashed', color='red', label='g(x) = x^2')
plt.plot(x, y_h, linestyle='dashed', color='green', label='h(x) = -x^2')
plt.axvline(0, color='gray', linewidth=0.5)
plt.axhline(0, color='gray', linewidth=0.5)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.title('Graf funkce f(x) s omezujícími křivkami')
plt.show()
```



Příklad. Najděme derivaci funkce $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$.

Řešení. Funkce $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ je spojitou funkcí na intervalu $(-\infty, \infty)$. Z fundamentální věty integrálního počtu plyne, že pro každé x platí:

$$g'(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

Příklad. Vypočítejme integrál $\int_0^3 e^x dx$.

Řešení. Necht' $f(x) = e^x$. Potom f je spojitá funkce na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$. Funkce $F(x) = e^x$ je spojitá na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$ a $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (0, 3)$. Protože f je integrabilní na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$, můžeme použít fundamentální větu integrálního počtu.

Z fundamentální věty integrálního počtu plyne, že

$$\int_0^3 e^x dx = \int_0^3 f(x) dx = F(3) - F(0) = e^3 - 1.$$

Označení. Pro výraz $F(b) - F(a)$ se používá označení: $[F(x)]_a^b$. Tj.

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Příklad. Vypočítejme obsah obrazce ohraničeného grafem funkce $f(x) = x^2$ a přímkami $x = 0$ a $x = 1$.

Řešení. Primitivní funkcí k funkci f je funkce $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Potom je obsah obrazce roven

$$A = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Příklad. Vypočítejme obsah obrazce ohraničeného grafem funkce $f(x) = \cos x$ a přímkami $x = 0$ a $x = \pi/2$.

Řešení. Primitivní funkcí k funkci f je funkce $F(x) = \sin x$. Potom je obsah obrazce roven:

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1.$$

Neurčitý integrál

Definice. Symbol $\int f(x) \, dx$ označuje nebo se nazývá neurčitý integrál funkce f představuje obecný tvar primitivní funkce k funkci f . Je-li tedy F primitivní funkcí k funkci f , pak je

$$\boxed{\int f(x) \, dx = F(x) + C,} \quad (\text{NI})$$

kde C je libovolná konstanta.

Poznámka. Je důležité říci, že vzorec (NI) pouze pro x náležící do jistého intervalu!!! Pokud budeme např. uvažovat funkci $f(x) = \frac{1}{x^2}$, pak pro funkci

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1 & x < 0, \\ -\frac{1}{x} + C_2 & x > 0, \end{cases}$$

platí, že $F'(x) = \frac{1}{x^2}$, pro všechna $x \neq 0$. Tedy pro každé $x \neq 0$ neplatí vzorec:

$$\int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} + C.$$

Předchozí vztah platí pouze pro $x \in (0, \infty)$ nebo pro $x \in (-\infty, 0)$.

Příklad. Jak víme, tak funkce $F(x) = \frac{x^3}{3}$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = x^2$. Potom je

$$\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Věta (Základní vlastnosti neurčitého integrálu).

$$\begin{aligned}
\int cf(x) dx &= c \int f(x) dx & \int [f(x) + g(x)] dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx \\
\int k dx &= kx + C \\
\int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) & \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C \\
\int e^x dx &= e^x + C & \int b^x dx &= \frac{b^x}{\ln b} + C \\
\int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \cos x dx &= \sin x + C \\
\int \sec^2 x dx &= \tan x + C & \int \csc^2 x dx &= -\cot x + C \\
\int \sec x \tan x dx &= \sec x + C & \int \csc x \cot x dx &= -\csc x + C \\
\int \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \tan^{-1} x + C & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \sin^{-1} x + C \\
\int \sinh x dx &= \cosh x + C & \int \cosh x dx &= \sinh x + C
\end{aligned}$$

Substituce v integrálu

Substituce v neurčitém integrálu

Věta. Je-li $u = g(x)$ diferencovatelná funkce jejíž obor hodnot je podmnožinou intervalu I a funkce f je spojitá na I , pak

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du.}$$

Důkaz. Věta je důsledkem věty o derivaci složené funkce. Pokud je $F(u)$ primitivní funkcí k funkci $f(u)$ a $u = g(x)$, pak

$$F'(u) = f(u) \quad \text{a} \quad (F(g(x)))' = f(g(x))g'(x).$$

Příklad. Vypočítejme integrál $\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx$.

Řešení. Aplikujme substituci $u = x^4 + 2$ a dostaneme:

$$\begin{aligned}
du &= 4x^3 dx \\
\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx &= \int \cos u \cdot \frac{1}{4} du = \frac{1}{4} \int \cos u du \\
&= \frac{1}{4} \sin u + C = \frac{1}{4} \sin(x^4 + 2) + C.
\end{aligned}$$

Cvičení. Ověřte správnost výsledku v předchozím příkladu derivováním.

Příklad. Vypočítejme integrál $\int \sqrt{2x+1} dx$.

Řešení. Aplikujme substituci a položme: $u = 2x + 1$. Pak dostaneme:

$$\begin{aligned} du &= 2 dx \\ \int \sqrt{2x+1} dx &= \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{2x+1} \cdot 2 dx.$$

Příklad. Vypočítejme integrál $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.

Řešení. Necht' $u = 1 - 4x^2$. Pak dostaneme: $du = -8x dx$. Tedy $x dx = -\frac{1}{8} du$.

Aplikujme substituci a dostaneme:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx &= -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du \\ &= -\frac{1}{8} \int u^{-\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{8} \cdot (2\sqrt{u}) + C = -\frac{1}{4} \cdot \sqrt{1-4x^2} + C. \end{aligned}$$

Vyvořme nyní obrázek grafů funkcí f a g a zjistíme, jak navzájem oba grafy souvisejí. Zde

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} \text{ a } g(x) = \int f(x) dx.$$

```
In [ ]: import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math, Latex

sp.init_printing(use_latex='mathjax')

x = sp.Symbol('x')
f = x / (sp.sqrt(1 - 4 * x**2))
g = sp.integrate(f, x)
display(Math(r"$f(x) = %s$" % sp.latex(f)))
display(Math(r"$g(x) = \int %s = %s$" % (sp.latex(f), sp.latex(g))))

a = -1/2 + 0.0001 # musíme přidat malé číslo, aby se nevyskytla chyba dělení nul
b = 1/2 - 0.0001

x_values = np.linspace(a, b, 100) # vytvoříme 100 hodnot x v intervalu [a,b]

y1 = [f.subs(x, x1) for x1 in x_values] # vypočítáme hodnoty funkce f(x) pro ka
y1 = np.array(y1) # převedeme na numpy pole

y2 = [g.subs(x, x1) for x1 in x_values]
y2 = np.array(y2) # převedeme na numpy pole

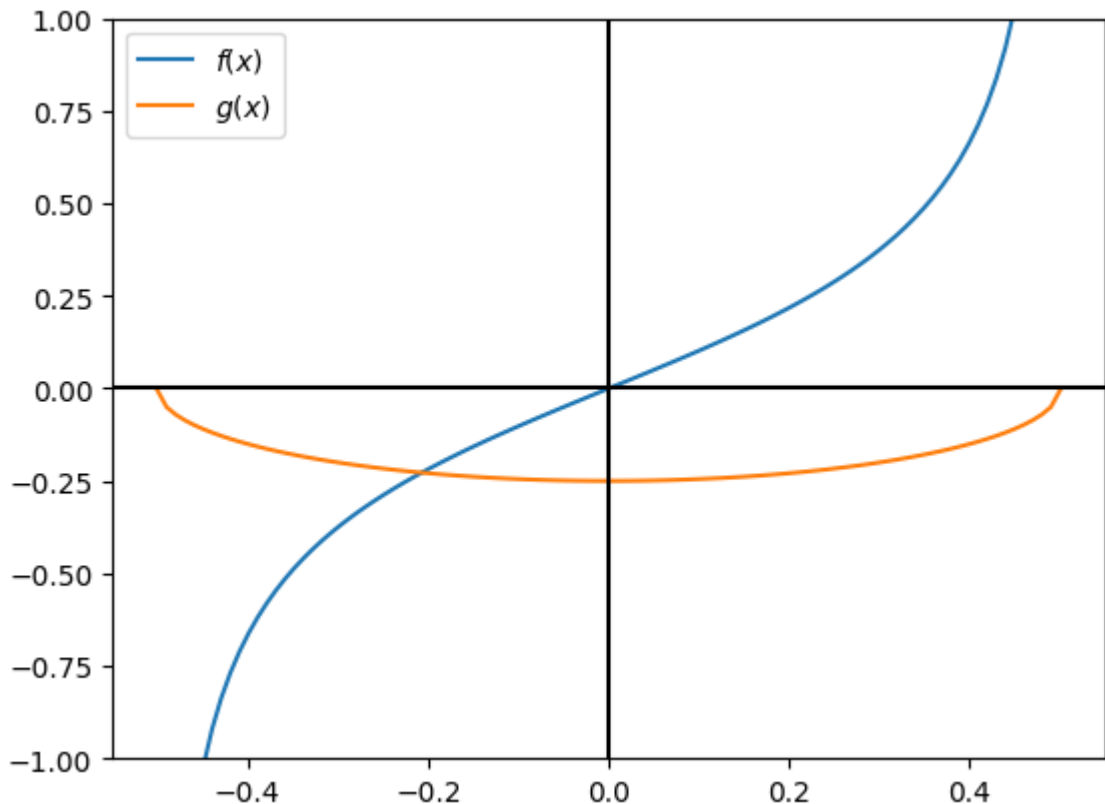
plt.plot(x_values, y1, label=r"$f(x)$") # r"" znamená, že řetězec je raw string
plt.plot(x_values, np.real(y2), label=r"$g(x)$") # np.real() je zde proto, aby s
plt.legend()
plt.ylim(-1, 1) # nastavíme rozsah osy y
```

```
# přidejme plot obou os
plt.axhline(y=0, color='k')
plt.axvline(x=0, color='k')

plt.show() # zobrazíme graf
```

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$g(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} = -\frac{\sqrt{1-4x^2}}{4}$$



Substituce v určitém integrálu

Věta. Jestliže je derivace g' spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a funkce f je spojitá na intervalu $I \supset \{u = g(x) : x \in \langle a, b \rangle\}$, pak pro $u = g(x)$ platí:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Příklad. Vypočítejme integrál $\int_1^4 \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

Řešení. Aplikujme substituci $u = g(x) = \sqrt{x}$ kde $x \in \langle 1, 4 \rangle$. Pak $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ je spojitá na $\langle 1, 4 \rangle$. Dále uvažujme funkci $f(u) = 2 \sin u$. Funkce f je spojitou funkcí na intervalu $I = (-\infty, \infty)$ a $f(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. Aplikujme větu a dostaneme:

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^4 2 \sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ &= \int_1^2 2 \sin u du = 2[-\cos u]_1^2 = 2[-\cos 2 + \cos 1].\end{aligned}$$

Příklad. Vypočítejme integrál $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.

Řešení. Aplikujme substituci $u = g(x) = \ln x$ kde $x \in \langle 1, e \rangle$. Pak $g'(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na $\langle 1, e \rangle$. Dále uvažujme funkci $f(u) = u$. Funkce f je spojitou funkcí na intervalu $I = (-\infty, \infty)$ a $f(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{\ln x}{x}$. Aplikujme větu a dostaneme:

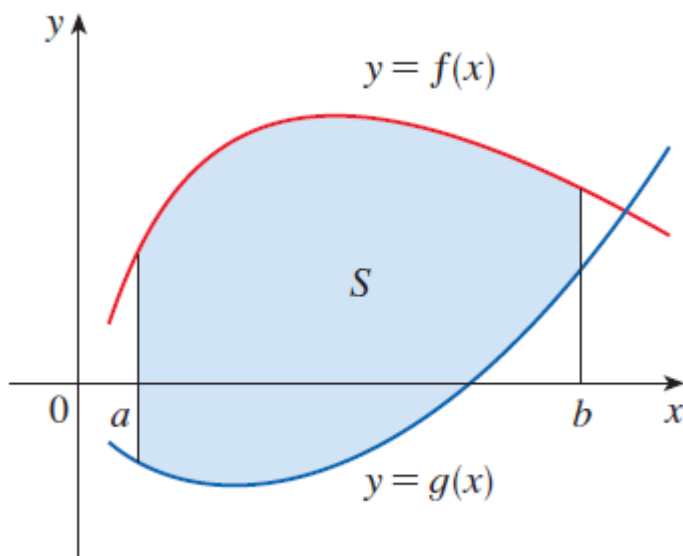
$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx &= \int_1^e \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \int_0^1 u du = \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Aplikace integrálního počtu

Obsah obrazce mezi dvěma křivkami

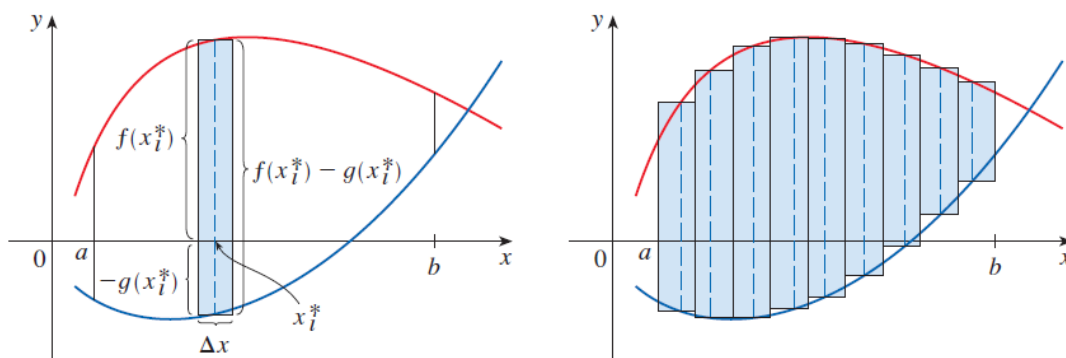
Obsah mezi dvěma křivkami: integrace vzhledem k x

Uvažujme obrazec S ohraničený dvěma křivkami $y = f(x)$ a $y = g(x)$ a kde $x \in \langle a, b \rangle$. Předpokládejme, že $f(x) \geq g(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$ a obě funkce jsou spojitě na $\langle a, b \rangle$.



Nyní lze aproximovat obsah A obrazce S pomocí pomocí integrálních součtů podobně jako v případě obrazce omezeného grafem kladné funkce f . Tj. součtem:

$$A \approx \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x.$$



Nyní je přirozené definovat obsah obrazce S jako limitu:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x.$$

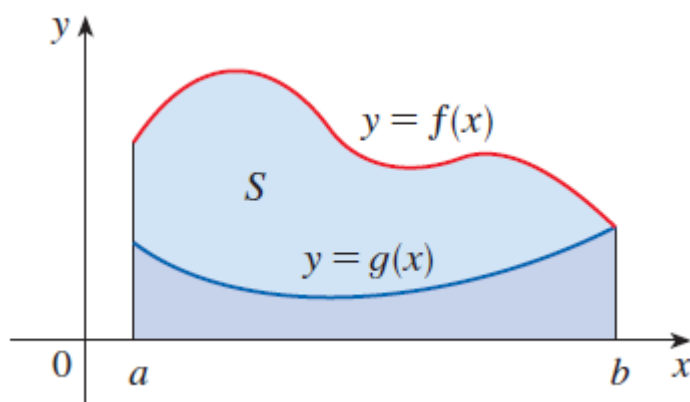
Platí tedy následující věta.

Věta. Obsah A obrazce omezeného křivkami $y = f(x)$, $y = g(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a kde funkce f a g jsou spojité takové, že je $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in [a, b]$ je roven:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Poznámka. Jsou-li funkce f a g v předchozí větě obě kladné, pak je A roven:

$$\begin{aligned} A &= [\text{obsah obrazce pod grafem funkce } f] - [\text{obsah obrazce pod grafem funkce } g]. \\ &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \end{aligned}$$



Příklad. Odvodíme vzorec pro obsah kruhu: $A = \pi r^2$ pomocí integrálu.

Řešení. Využijeme vztah $A = \int_{-r}^r [\sqrt{r^2 - x^2} - (-\sqrt{r^2 - x^2})] dx$.

Tedy

$$A = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_0^r \sqrt{r^2 \left(1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right)} dx$$

$$= r \int_0^r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} dx = \dots$$

Nyní použijme substituci: $u = g(x) = \frac{x}{r}$, tedy $du = \frac{dx}{r}$ a dostaneme

$$= r^2 \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du = \dots$$

Uvažujme neurčitý integrál $\int \sqrt{1 - u^2} du$.

Položme $u = g(x) = \sin x$, kde $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Pak po diferencování dostaneme:

$$du = \cos x dx.$$

Dále

$$\sqrt{1 - u^2} = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = \cos x = f(g(x)).$$

$$g'(x) = \cos x.$$

$$\int f(u) du = \int \sqrt{1 - u^2} du = \int f(g(x)) g'(x) dx = \int \cos x \cos x dx = \dots$$

$$\dots = \int \cos^2 x dx =$$

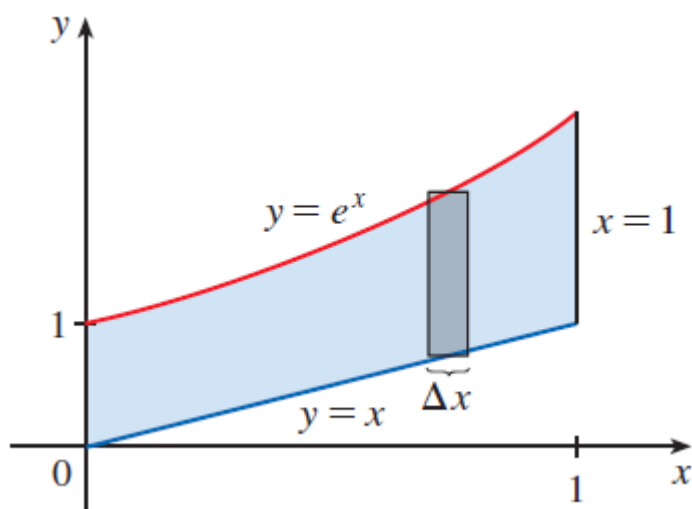
$$= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \dots$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x\right) + C, \quad x = \arcsin u, \quad u \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du = \left[\frac{1}{2} \cdot (\arcsin u + \frac{1}{2} \sin(2 \cdot \arcsin u)) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Příklad. Vypočítejme obsah obrazce S omezeného křivkami $y = e^x$ a $y = x$, přičemž $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

Řešení. Obrazec S je zobrazen na obrázku:

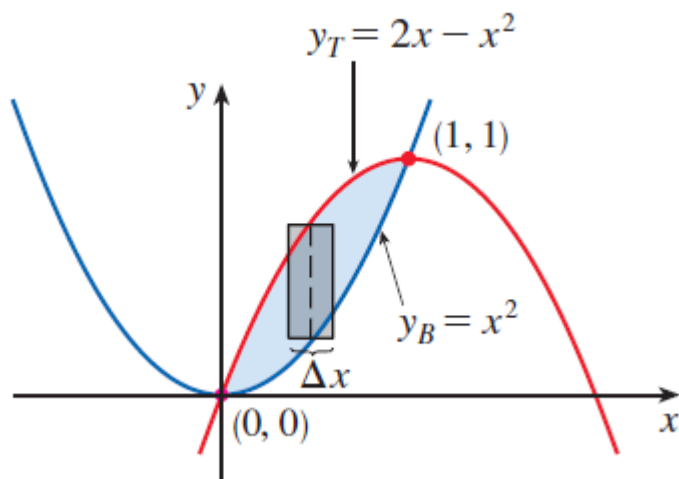


Je zřejmé, že horní křivkou je křivka $y = e^x$ a dolní křivkou je křivka $y = x$. Tedy $f(x) = e^x$ a $g(x) = x$, $a = 0$ a $b = 1$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (e^x - x) dx = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 x dx = \\ &= [e^x]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= e^1 - 1 - \frac{1}{2} = e - 1.5. \end{aligned}$$

Příklad. Vypočítejme obsah A obrazce, který je ohraničený křivkou $y = x^2$ a křivkou $y = 2x - x^2$.

Řešení. Ukažme si obrázek křivek a obrazce.

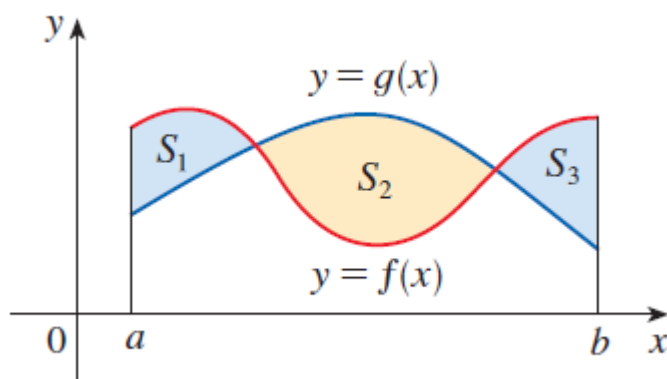


Z obrázku je patrné, že horní křivkou je křivka $y_T = 2x - x^2$ a dolní křivkou je křivka $y_B = x^2$. Nyní určíme průsečíky těchto křivek. První průsečík je v bodě $(0, 0)$, druhý průsečík je v bodě $(1, 1)$. Obrazec tedy leží mezi přímkami $x = 0$ a $x = 1$. Obsah plochy je tedy roven

$$\begin{aligned} \int_0^1 [(2x - x^2) - x^2] dx &= 2 \int_0^1 (x - x^2) dx \\ &= 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Pokud máme vypočítat obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = f(x)$ a $y = g(x)$, kde jednak $f(x) \geq g(x)$ a jednak $f(x) \leq g(x)$, pro $x \in \langle a, b \rangle$, pak lze obrazec rozdělit na části $S_1, S_2, \dots, S_n$ a vypočítat jejich obsahy $A_1, A_2, \dots, A_n$ jak je vidět na následujícím obrázku. Výsledný obsah obrazce je pak roven součtu všech částí, tedy

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

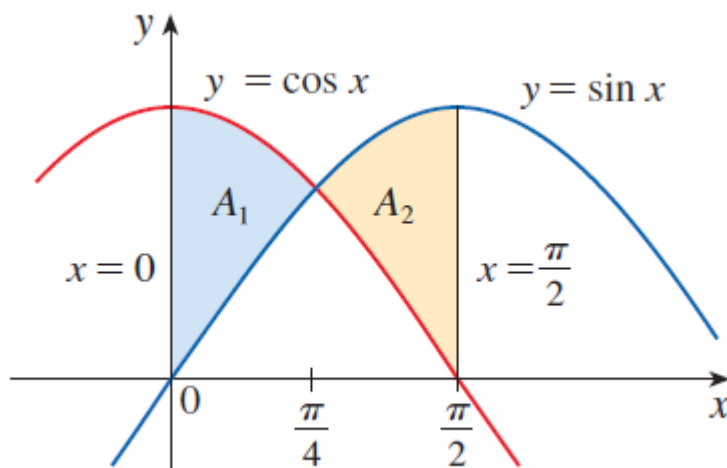


Věta. Obsah obrazce mezi křivkami $y = f(x)$ a $y = g(x)$, kde $x \in \langle a, b \rangle$ je roven

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Příklad. Najděme obsah obrazce mezi křivkami $y = \sin x$ a $y = \cos x$ na intervalu $x \in \langle 0, \pi/2 \rangle$.

Body, kde se křivky protínají určíme, když položíme $\sin x = \cos x$. Tedy $x = \pi/4$ na intervalu $x \in \langle 0, \pi/2 \rangle$. Viz obrázek:



Uvědomme si, že na intervalu $\langle 0, \pi/4 \rangle$ je $\cos x \geq \sin x$ a na intervalu $\langle \pi/4, \pi/2 \rangle$ je $\sin x \geq \cos x$. Tedy

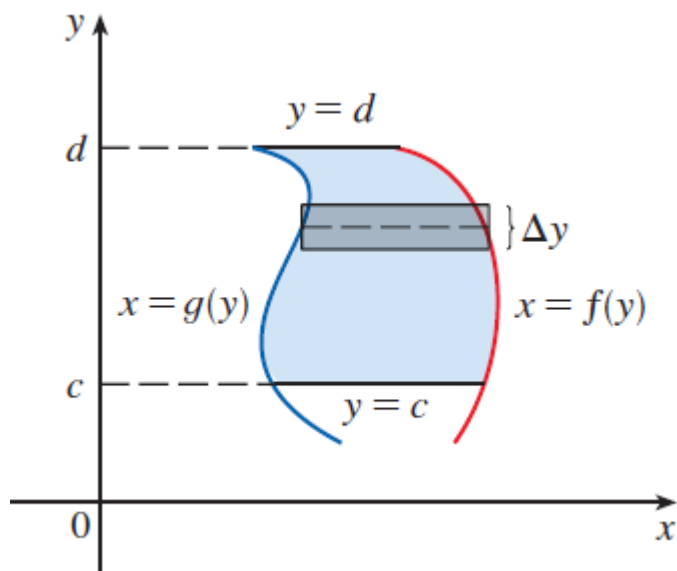
$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\pi/2} |\cos x - \sin x| dx = A_1 + A_2 \\
 &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx \\
 &= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1 \right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= 2\sqrt{2} - 2.
 \end{aligned}$$

Poznámka: Výše uvedený postup lze významně zjednodušit, pokud vezmeme v úvahu symetrii:

$$A = 2A_1 = 2 \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx.$$

Obsah mezi dvěma křivkami: integrace vzhledem k y

Uvažujme obrazec ohraničený křivkami $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ a $y = d$, kde $f(y)$ a $g(y)$ jsou spojité funkce a $f(y) \geq g(y)$ pro $c \leq y \leq d$. Viz obrázek.

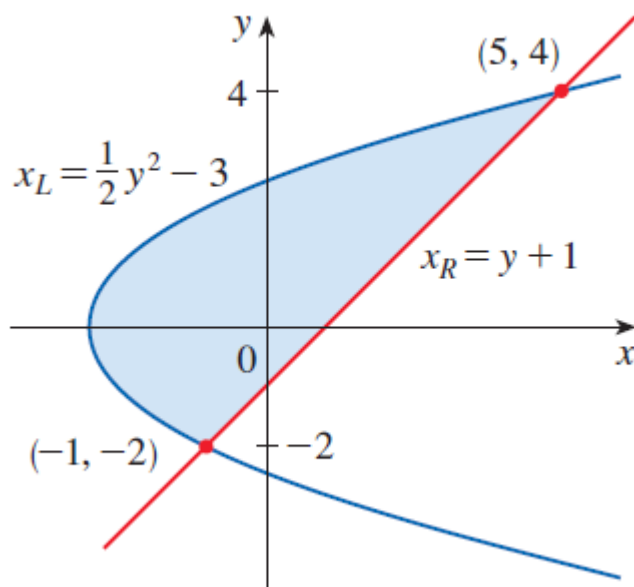


Nyní lze obsah obrazce A vyjádřit jako integrál vzhledem k integrační proměnné y :

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy.$$

Příklad. Vypočítejme obsah obrazce A ohraničeného křivkami $y = x - 1$ a $y^2 = 2x + 6$.

Řešení. Křivky $y = x - 1$ a $y^2 = 2x + 6$ se protínají v bodech $(-1, -2)$ a $(5, 4)$, tedy $x_L = g(y) = \frac{1}{2}y^2 - 3$ a $x_R = f(y) = y + 1$. Viz obrázek.



Obsah obrazce A ohraničeného křivkami $y = x - 1$ a $y^2 = 2x + 6$ je roven 18 jednotek čtverečních, jak lze spočítat pomocí integrace vzhledem k proměnné y . Nyní shrneme postup:

1. Vyjádříme x z obou rovnic:

a) $x = y + 1$ b) $x = \frac{1}{2}(y^2 - 6)$

2. Určíme interval integrace podle hodnot y . Průsečíky jsou $P_1(-1, -2)$ a $P_2(5, 4)$.

Interval integrace je od -2 do 4 .

3. Sestavíme a spočítáme integrál:

$$A = \int_{-2}^4 \left[(y+1) - \frac{1}{2}(y^2 - 6) \right] dy$$

$$A = \int_{-2}^4 (y+1)dy - \int_{-2}^4 \frac{1}{2}(y^2 - 6)dy$$

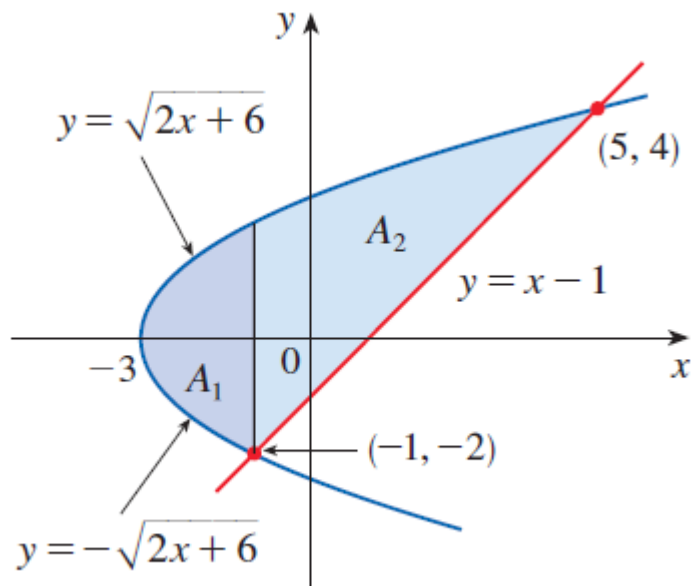
$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 (y+1)dy &= \left[\frac{y^2}{2} + y \right]_{-2}^4 \\ &= \left[\frac{16}{2} + 4 \right] - \left[\frac{4}{2} - 2 \right] \\ &= 8 + 4 - (2 - 2) \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 \frac{1}{2}(y^2 - 6)dy &= \frac{1}{2} \left[\frac{y^3}{3} - 6y \right]_{-2}^4 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{64}{3} - 24 \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{-8}{3} + 12 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{64 - 72}{3} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{-8 + 36}{3} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-8}{3} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{28}{3} \right] \\ &= \frac{-4}{3} - \frac{14}{3} \\ &= \frac{-18}{3} \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$A = 12 - (-6) = 12 + 6 = 18$$

Takže obsah obrazce A ohraničeného křivkami $y = x - 1$ a $y^2 = 2x + 6$ je 18.

Poznámka. Obsah obrazce A ohraničeného křivkami $y = x - 1$ a $y^2 = 2x + 6$ lze určit i pomocí integrace vzhledem k proměnné x . V tomto případě je výpočet složitější. Spodní hraniční křivka se skládá ze dvou křivek: $y = -\sqrt{2x+6}$ a $y = x - 1$. Horní hraniční křivka je $y = \sqrt{2x+6}$. Obrazec poté rozdělíme na dvě části jejichž obsahy označíme A_1 a A_2 . Viz následující obrázek:



Spočítáme obsahy A_1 a A_2 :

a) A_1 je ohraničen shora křivkou $y = \sqrt{2x+6}$ a zdola křivkou $y = -\sqrt{2x+6}$.

$$A_1 = \int_{-3}^{-1} (\sqrt{2x+6} - (-\sqrt{2x+6})) dx = \int_{-3}^{-1} (2\sqrt{2x+6}) dx$$

b) A_2 je ohraničen shora křivkou $y = \sqrt{2x+6}$ a zdola křivkou $y = x - 1$.

$$A_2 = \int_{-1}^5 (\sqrt{2x+6} - (x-1)) dx$$

Spočítáme integrály a sečteme obsahy A_1 a A_2 pro celkový obsah obrazce A .

```
In [ ]: # Určíme hodnotu A_1
import sympy as sp

# definujeme symboly x a y
x, y = sp.symbols('x y')
expr = 2 * sp.sqrt(2 * x + 6) # výraz pro výpočet A_1
a, b = -3, -1

A1 = sp.integrate(expr, (x, a, b))

print("A_1 = ", A1)

# Určíme hodnotu A_2
expr2 = sp.sqrt(2 * x + 6) - (x - 1) # výraz pro výpočet A_2
a, b = -1, 5

A2 = sp.integrate(expr2, (x, a, b))
print("A_2 = ", A2)

print("Obsah pomocí integrace vzhledem k x")
print("A_1 + A_2 = ", A1 + A2)

# Určíme hodnotu A pomocí integrace vzhledem k y
expr3 = (y + 1) - (1/2) * y**2 + 3 # výraz pro výpočet A
a, b = -2, 4
```

```
A = sp.integrate(expr3, (y, a, b))
print()
print("Obsah pomocí integrace vzhledem k y")
print("A = ", A)
```

A_1 = 16/3

A_2 = 38/3

Obsah pomocí integrace vzhledem k x

A_1 + A_2 = 18

Obsah pomocí integrace vzhledem k y

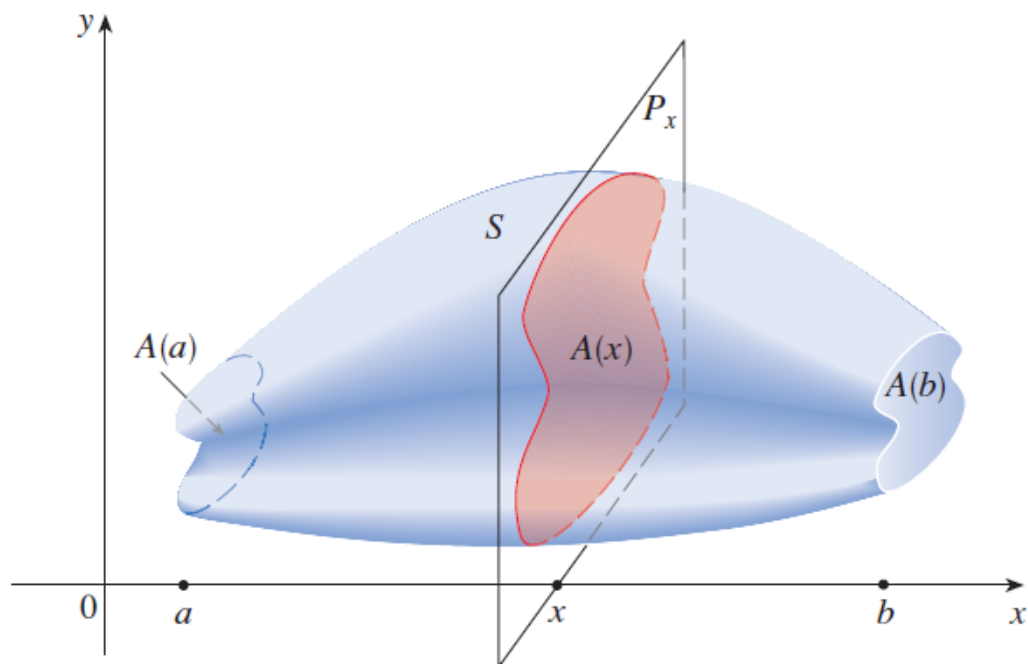
A = 18.000000000000000

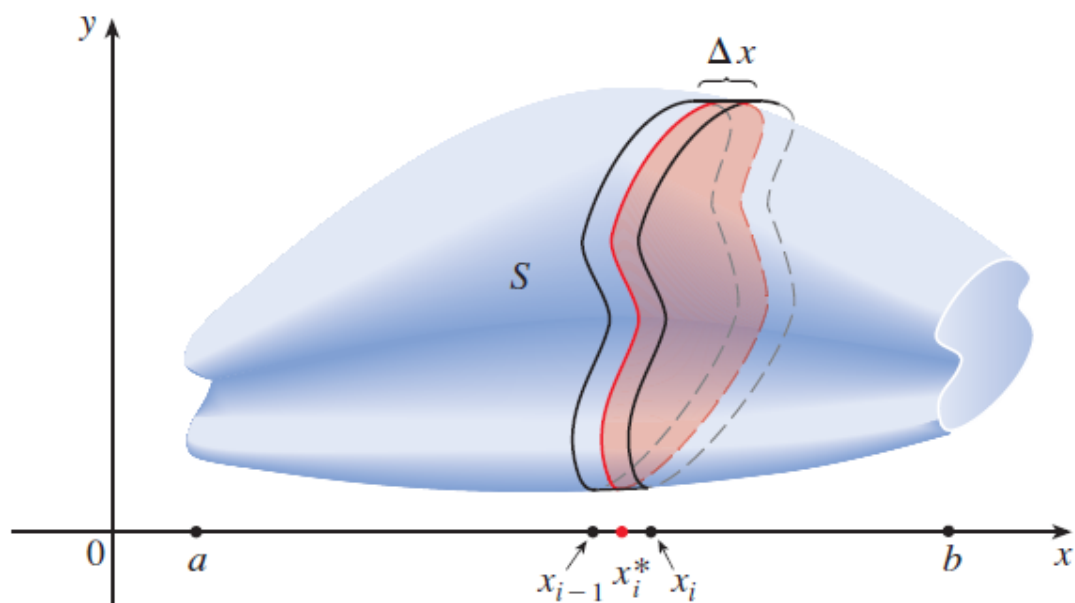
Objem rotačního tělesa

Definice objemu

Definice. Necht' S je těleso nacházející se mezi rovinami $x = a$ a $x = b$. Necht' dále $A(x)$ označuje obsah řezu S rovinou P_x , kde P_x je rovina kolmá na osu x a procházející bodem x . Pokud pro $x \in \langle a, b \rangle$ $A(x)$ spojitě závisí na x , pak se objem S označuje jako

$$V(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x = \int_a^b A(x) dx.$$



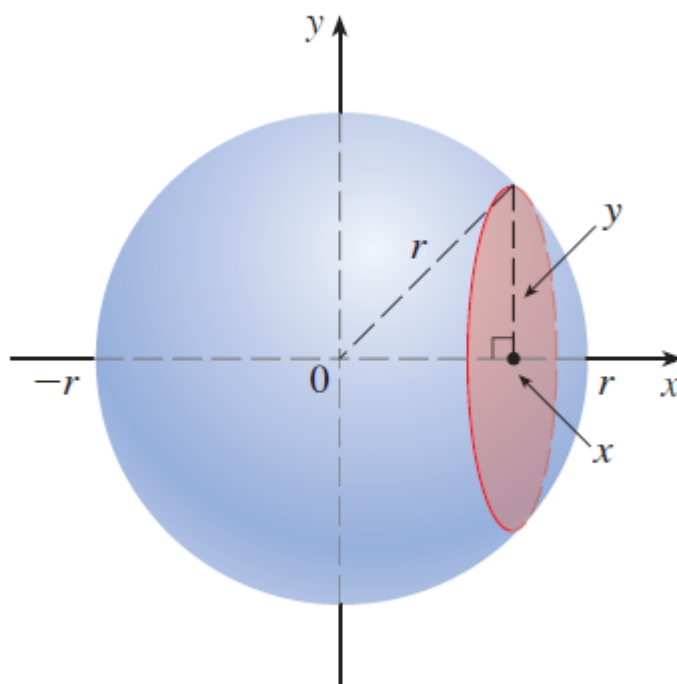


Příklad. Ukažme, že platí pro objem koule o poloměru r :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Řešení. Zde platí, že $a = -r$, $b = r$,

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2), \quad \text{kde } y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

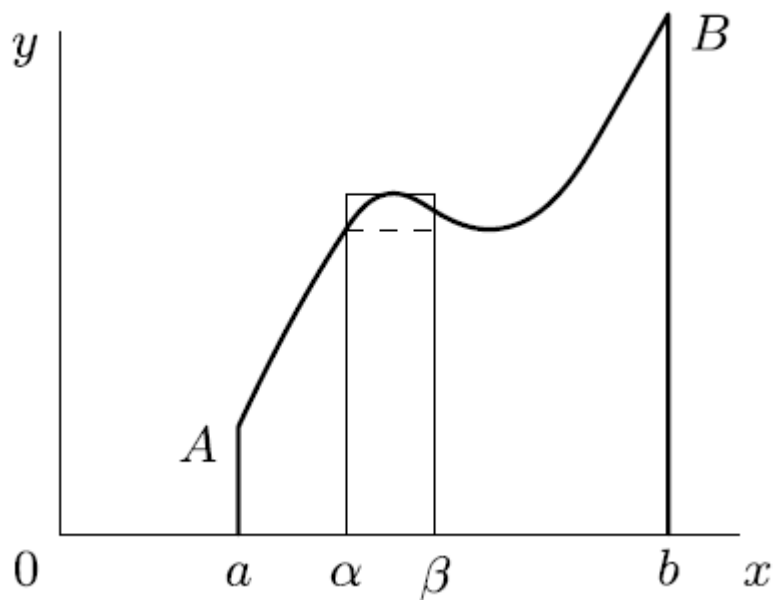


$A(x)$ je spojitou funkcí pro $x \in \langle -r, r \rangle$. Užitím definice objemu dostaneme:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-r}^r A(x) dx = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx \\
 &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx \\
 &= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r \\
 &= 2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right] \\
 &= \frac{4}{3} \pi r^3.
 \end{aligned}$$

Vzorec pro objem rotačního tělesa

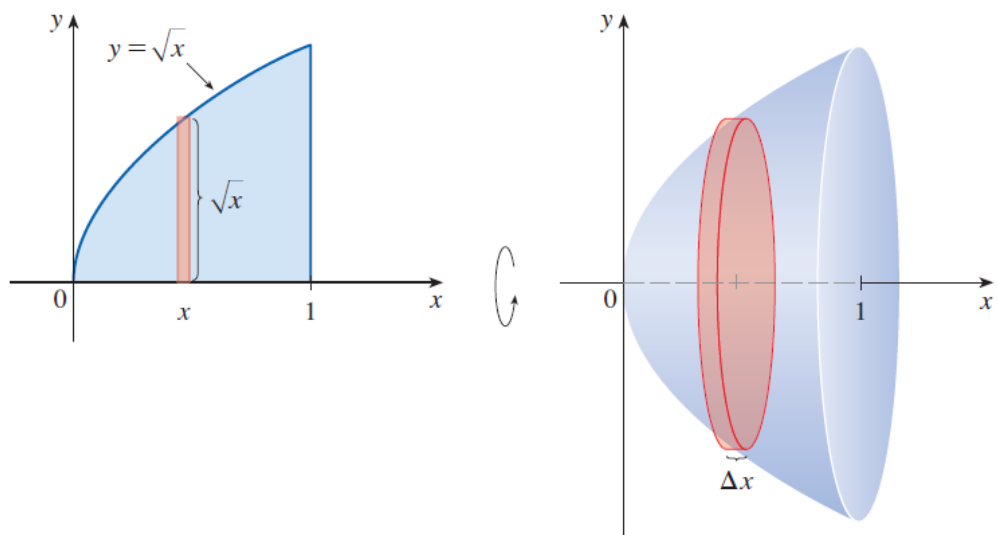
Nyní uvažujme, že kolem osy x rotuje obrazec ohraničený grafem kladné spojité funkce $y = f(x)$ a $x \in \langle a, b \rangle$. Viz obrázek.



Potom pro objem platí:

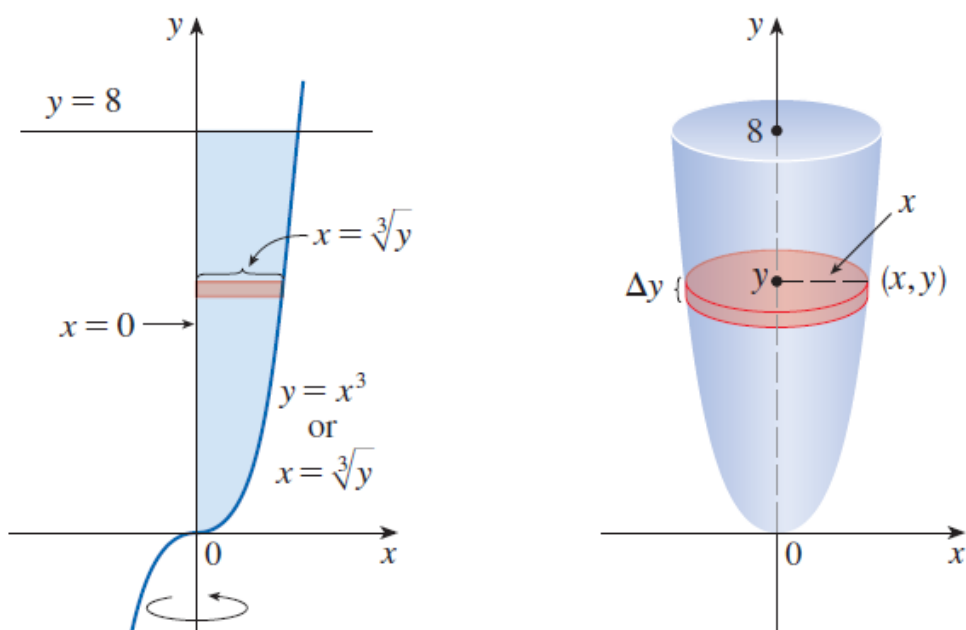
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Příklad 1. Spočítejte objem tělesa, které vznikne rotací plošného obrazce pod křivkou $y = \sqrt{x}$ kolem osy x a kde $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Viz obrázek níže.



$$V = \int_0^1 A(x) dx = \int_0^1 \pi x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Příklad. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkou $y = x^3$, $y = 8$ a $x = 0$ kolem osy y . Viz obrázek:



Řešení. Zde platí $x = \sqrt[3]{y}$ a

$$A(y) = \pi(x)^2 = \pi(\sqrt[3]{y})^2 = \pi y^{2/3}.$$

$$A(y)\Delta y = \pi y^{2/3}\Delta y.$$

Nyní platí pro objem V :

$$V = \int_0^8 A(y)dy = \pi \int_0^8 y^{2/3}dy = \pi \left[\frac{3}{5}y^{5/3} \right]_0^8 = \pi \frac{96}{5}.$$

□

Další techniky integrace

Integrace metodou per partes

Integrace metodou per partes: neurčitý integrál

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají spojité derivace na intervalu (a, b) , potom platí vzorec:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Důkaz. Podle předpokladů existuje na intervalu (a, b) primitivní funkce $G(x)$ k funkci $f'(x)g(x)$. Potom, položíme-li na intervalu (a, b) : $F(x) = f(x)g(x) - G(x)$, potom pro každé $x \in (a, b)$ platí:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (f(x)g(x) - G(x))' = (f(x)g(x))' - G'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - G'(x) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x). \end{aligned}$$



Tudíž je funkce $F(x)$ primitivní funkcí k $f(x)g'(x)$. □

Vzorec pro derivaci součinu:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Příklad. Najděme neurčitý integrál $\int x \sin x dx$ metodou per partes.

Řešení. Zde platí $f(x) = x$ a $g'(x) = \sin x$. Potom podle vzorce platí:

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)dx = \\ &= x(-\cos x) + \sin x = -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Příklad. Najděme neurčitý integrál $\int \ln x dx$ metodou per partes.

Řešení. Zde platí $f(x) = \ln x$ a $g'(x) = 1$. Potom podle vzorce platí:

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx = x \ln x - \int \left(\frac{1}{x}\right) \cdot x dx = \\ &= x \ln x - x + C. \end{aligned}$$

Integrace metodou per partes: určitý integrál

Mějme dány funkce $f(x)$ a $g(x)$, které mají spojité derivace. Potom platí vzorec:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z toho, že platí věta o integraci metodou per partes pro neurčitý integrál a z fundamentální věty integrálního počtu. $\square$

Příklad. Najděme určitý integrál $\int_0^1 \arctan x \, dx$ metodou per partes.

Řešení. Zde platí $f(x) = \arctan x$ a $g'(x) = 1$. Potom podle vzorce platí:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan x \, dx &= [f(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x)dx = \\ &= [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= \arctan 1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

Poslední intergál spočítáme substituční metodou: $u = x^2$ a potom $du = 2x dx$. Potom platí:

$$\begin{aligned} (1/2) \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+u} du = \frac{1}{2} \ln(1+u) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \arctan(x) dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

Integrace racionálních lomených funkcí

Racionální lomenou funkcí se rozumí funkce ve tvaru:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy.

Připomeňme, že polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, kde $a_n \neq 0$.

Racionální lomená funkce $f(x)$ je **ryzí**, pokud $st(Q(x)) > st(P(x))$. V případě, kdy $st(Q(x)) \leq st(P(x))$, pak po vydělení dostaneme:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $S(x)$ a $R(x)$ jsou polynomy a $st(R(x)) < st(Q(x))$.

Příklad. Najděme neurčitý integrál $\int \frac{x^3+x}{x-1} dx$.

Řešení. Zde platí $P(x) = x^3 + x$ a $Q(x) = x - 1$. Potom není funkce $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ryzí, protože $st(Q(x)) = 1 \leq st(P(x)) = 3$. Potom po vydělení dostaneme:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} = x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1}.$$

```
In [ ]: # Vydělme P(x) / Q(x)
import sympy as sp
from IPython.display import display, Math, Latex
x = sp.Symbol('x')
P = x**3 + x
Q = x - 1
# vydělme P(x) / Q(x)
R = P / Q
# najděme podíl a zbytek
R1 = sp.div(P, Q)
# vypíšeme podíl a zbytek
display(Math(r"%s = %s + \frac{%s}{%s}" % (sp.latex(R), sp.latex(R1[0]), sp.latex(R1[1]), sp.latex(Q))
```

$$\frac{x^3+x}{x-1} = x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1}$$

Nyní můžeme integrovat:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+x}{x-1} dx &= \int x^2 dx + \int x dx + \int 2 dx + \int \frac{2}{x-1} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

Dále předpokládejme, že lze polynom $Q(x)$ rozložit na součin lineárních členů:

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_kx + b_k).$$

V tomto případě lze najít konstanty $A_1, A_2, \dots, A_k$ takové, že:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \dots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}.$$

Příklad. Najděme neurčitý integrál $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} dx$.

Řešení. Protože stupeň polynomu v čitateli je menší než je stupeň polynomu v jmenovateli, jedná se o ryzí lomenou funkci. Dále lze polynom $Q(x)$ rozložit na součin lineárních členů:

$$Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2).$$

Tedy:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}.$$

Pokud zlomky na pravé straně převedeme na společného jmenovatele, dostaneme porovnáním levé a pravé strany:

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1).$$

Po roznásobení závorek na pravé straně a porovnáním koeficientů u příslušných mocnin x dostaneme:

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1, \\ 3A + 2B - C &= 2, \\ -2A &= -1. \end{aligned}$$

Vyřešením soustavy dostaneme $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$, $C = -\frac{1}{10}$. Potom:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx &= \int \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} dx = \\ &= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2} \right) dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{5} \frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10} \frac{1}{x + 2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{10} \ln |2x - 1| - \frac{1}{10} \ln |x + 2| + C. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že v rozkladu polynomu $Q(x)$ je obsažen faktor typu $(ax + b)^r$, kde $r > 1$. V tomto případě bude rozklad racionální lomené funkce $f(x)$ obsahovat parciální zlomky:

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_r}{(ax + b)^r}.$$

Například:

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x - 1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2} + \frac{E}{(x - 1)^3}.$$

Příklad. Najděme neurčitý integrál $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$.

Řešení. Zde platí $P(x) = x^4 - 2x^2 + 4x + 1$ a $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Potom není funkce $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ryzí, protože $st(Q(x)) = 3 < st(P(x)) = 4$. Potom po vydělení dostaneme:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

Rozložme polynom $Q(x)$ na součin lineárních členů:

$$Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1).$$

Potom máme:

$$\frac{4x}{(x - 1)^2(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1}.$$

Převedením na společného jmenovatele dostaneme rovnost:

$$\begin{aligned} 4x &= A(x - 1)(x + 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2 \\ &= (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u příslušných mocnin x dostaneme:

$$\begin{aligned} A + C &= 0, \\ B - 2C &= 4, \\ -A + B + C &= 0. \end{aligned}$$

Řešením soustavy dostaneme $A = 1, B = 2, C = -1$. Potom:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x + 1} \right] dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x - 1| - \frac{2}{x - 1} - \ln|x + 1| + C \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x - 1} + \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + C. \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že polynom $Q(x)$ má ve svém rozkladu faktor typu $ax^2 + bx + c$, kde $b^2 - 4ac < 0, a \neq 0$. V tomto případě bude rozklad racionální lomené funkce $f(x)$ obsahovat parciální zlomek ve tvaru:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

Například, máme-li racionální lomenou funkci $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)}$, pak její rozklad bude:

$$\frac{x}{(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + 4}.$$

K nalezení neurčitého integrálu $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$ použijeme vzorec:

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C}.$$

Příklad. Najděme neurčitý integrál $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$.

Řešení. Zde platí $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$. Potom máme:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}.$$

Pokud uvedenou rovnost nyní roznásobíme výrazem $x(x^2 + 4)$, dostaneme:

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u příslušných mocnin x dostaneme:

$$A + B = 2, \quad C = -1, \quad 4A = 4.$$

Potom:

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = -1.$$

Odtud máme:

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2 + 4} \right) dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x-1}{x^2 + 4} dx.$$

Nejdříve hledíme druhý z integrálů:

Integrand rozložíme následujícím způsobem:

$$\frac{x-1}{x^2 + 4} = \frac{x}{x^2 + 4} - \frac{1}{x^2 + 4}.$$

Tedy integrujme:

$$\int \frac{x-1}{x^2 + 4} dx = \int \frac{x}{x^2 + 4} dx - \int \frac{1}{x^2 + 4} dx.$$

První z integrálů na pravé straně lze zjednodušit pomocí substituce $u = x^2 + 4$:

$$\int \frac{x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 4| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C.$$

Druhý z integrálů na pravé straně najdeme podle výše uvedeného vzorce:

$$\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Konečně můžeme spočítat neurčitý integrál $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} dx$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} dx &= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x-1}{x^2 + 4} dx = \\ &= \ln |x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

konec 5.3.2024

Zde předpokládejme, že polynom $Q(x)$ má ve svém rozkladu faktor typu $(ax^2 + bx + c)^r$, kde $b^2 - 4ac < 0$. V tomto případě bude rozklad racionální lomené funkce $f(x)$ obsahovat parciální zlomky tvaru:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}.$$

Příklad. Najděme rozklad na parciální zlomky racionální lomené funkce

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}.$$

Řešení. Zde platí:

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^2}$$

Příklad. Najděme neurčitý integrál

$$\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} dx.$$

Řešení. Zde platí:

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Pokud tuto rovnost roznásobíme výrazem $x(x^2+1)^2$, dostaneme:

$$\begin{aligned} 1-x+2x^2-x^3 &= A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x \\ &= A(x^4+2x^2+1) + B(x^4+x^2) + C(x^3+x) + Dx^2 + Ex \\ &= (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že:

$$A+B=0, \quad C=-1, \quad 2A+B+D=2, \quad C+E=-1, \quad A=1.$$

Řešením je tedy: $A=1, B=-1, C=-1, D=1, E=0$. Potom lze uvést daný neurčitý integrál do tvaru:

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx = \\ &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x - \frac{1}{2(x^2+1)} + C. \end{aligned}$$

Příklad. Položme

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Integrací per partes zjistíme, že:

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^k} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + 2k \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{k+1}} = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + 2k \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{k+1}} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}. \end{aligned}$$

Odtud lze odvodit rekurzivní formuli:

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2} I_k.$$

Připomeňme, že:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

```
In [ ]: # hledejme neurčitý integrál funkce f(x)
import sympy as sp
from sympy import *
from IPython.display import display, Math, Latex
x = sp.Symbol('x')
f = (4 * x**2 - 6 * x + 5) / (x**2 - 4 * x + 5)
int_f = sp.integrate(f, x)
display(Math(r"\int %s \, dx = %s + C" % (sp.latex(f), sp.latex(int_f))))

derivace = sp.diff(4 * x + 5 * sp.log(x**2 - 4 * x + 5) + 5 * sp.atan(x - 2), x)
display(Math(r"\frac{d}{dx} (%s + C) = %s" % (sp.latex(int_f), sp.latex(derivace))))
```

$$\int \frac{4x^2 - 6x + 5}{x^2 - 4x + 5} dx = 4x + 5 \log(x^2 - 4x + 5) + 5 \operatorname{atan}(x - 2) + C$$

$$\frac{d}{dx}(4x + 5 \log(x^2 - 4x + 5) + 5 \operatorname{atan}(x - 2) + C) = \frac{4x^2 - 6x + 5}{x^2 - 4x + 5}$$

$$x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}.$$

Pokud položíme

$$u = x + \frac{1}{2},$$

Tak pak

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = u^2 + \frac{7}{4}.$$

Nechť například $Q(x) = 2x^2 + 3x + 5$. Transformujte tento trojčlen do tvaru $Q(x) = 2 \cdot (u^2 + a^2)$.

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x^2 + 3x + 5 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right) = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} + \frac{5}{2}\right) = \\ &= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}\right]. \end{aligned}$$

Spočítejme pak integrál $\int \frac{dx}{Q(x)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}} =$

$$= \left| u = x + \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + \frac{31}{16}} =$$

konec 12.3.

Nevlastní integrály

Nevlastní integrály vlivem nevlastní meze

Definice. (Nevlastní integrál vlivem nevlastní meze).

(a) Existuje-li $\int_a^t f(x) dx$, kde $t \geq a$, pak definujeme:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx,$$

pokud existuje limita na pravé straně a je konečná.

(b) Existuje-li $\int_t^b f(x) dx$, kde $t \leq b$, pak definujeme:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx,$$

pokud existuje limita na pravé straně a je konečná.

Nevlastní integrály $\int_a^\infty f(x) dx$ a $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ říkáme, že **konvergují**, pokud odpovídající limity existují a jsou konečné. Dále říkáme, že **divergují**, pokud odpovídající limity neexistují nebo jsou nevlastní.

(c) Pokud oba nevlastní intergály $\int_a^\infty f(x) dx$ a $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ konvergují, pak definujeme:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_a^\infty f(x) dx + \int_{-\infty}^a f(x) dx.$$

Na pravé straně lze zvolit $a \in \mathbb{R}$ libovolně.

Příklad. Vypočítejme hodnotu nevlastního integrálu:

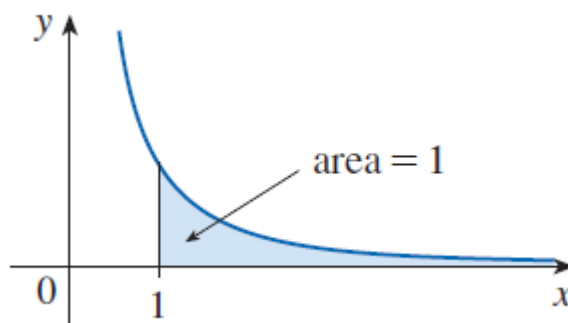
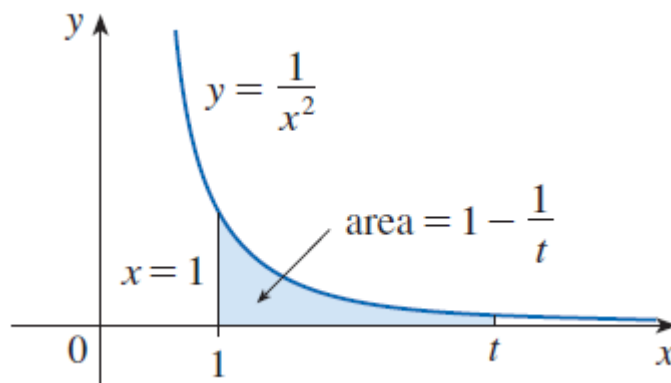
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

Řešení. Zjistíme, že:

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

Potom lze psát:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right) = 1.$$



Příklad. Zjistíme, zdali konverguje integrál $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \ln x dx$.

Podle části (a) definice máme:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln t - \ln 1] = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t = \infty.$$

Uvedená limita neexistuje jako konečná limita a tedy integrál $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ diverguje.

Příklad. Vypočítáme integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$.

Řešení. Podle části (c) definice máme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx.$$

Dále vypočítejme oba nevlastní integrály na pravé straně:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [\arctan x]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\arctan t - \arctan 0] = \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} [\arctan x]_t^0 \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [\arctan 0 - \arctan t] = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-\arctan t) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

```
In [ ]: # @title
# Zobrazme graf funkce 1/(x^2 + 1)
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math, Latex

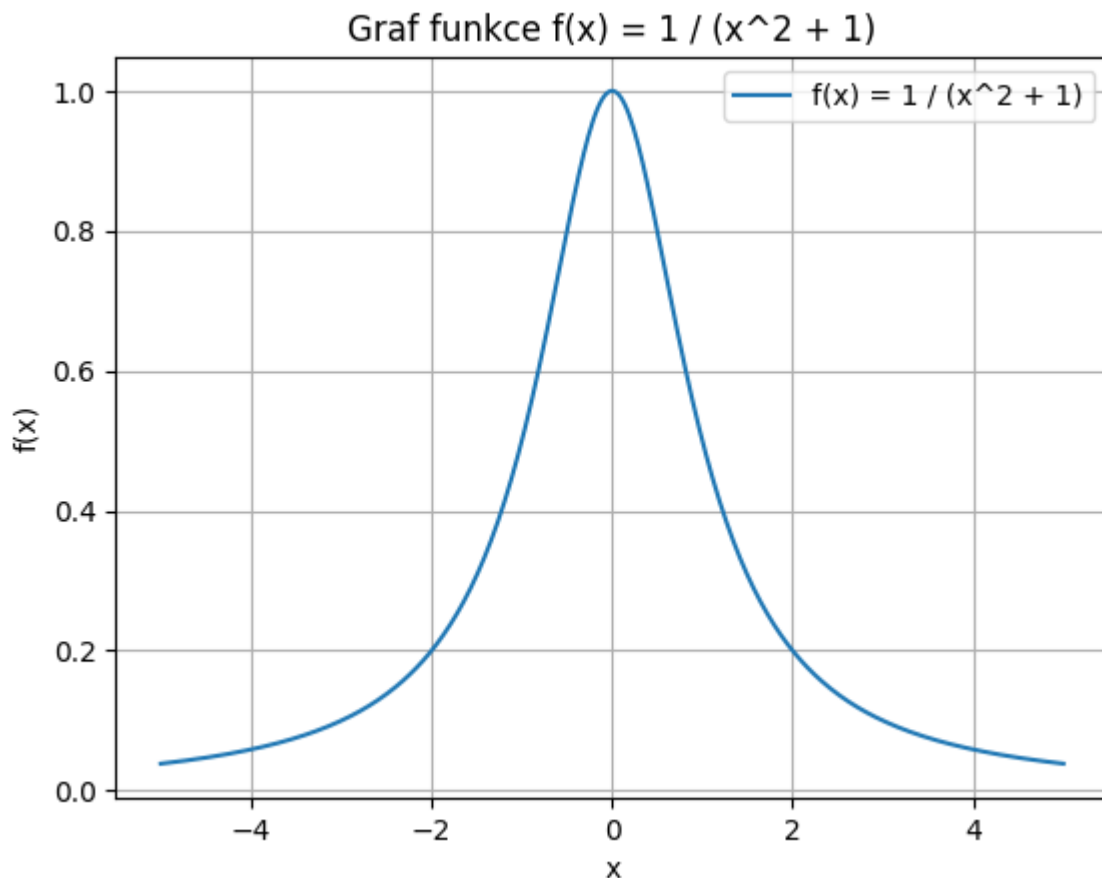
# Initialize symbolic variable and define the function
x = sp.Symbol('x')
f = 1 / (x**2 + 1)

# Display the function using LaTeX representation
display(Math(r"f(x) = %s" % sp.latex(f)))

# Create an array of x-values and compute the corresponding y-values
x_vals = np.linspace(-5, 5, 400)
f_lambdified = sp.lambdify(x, f, "numpy")
y_vals = f_lambdified(x_vals)

# Plot the function using matplotlib
plt.plot(x_vals, y_vals, label='f(x) = 1 / (x^2 + 1)')
plt.title('Graf funkce f(x) = 1 / (x^2 + 1)')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$



Příklad. Vypočítejme, že funkce $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je sudou funkcí, tj.

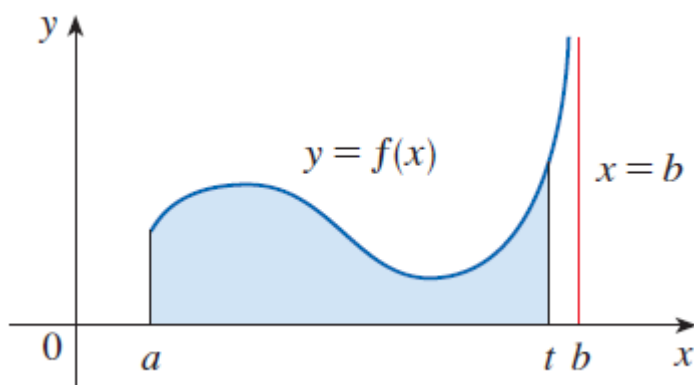
$$\varphi(-x) = \varphi(x) \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Dále předpokládejme, že konverguje nevlastní integrál $\int_x^\infty \varphi(s) ds$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$.
Potom \$\$

Nevlastní integrály vlivem neomezenosti integrandu

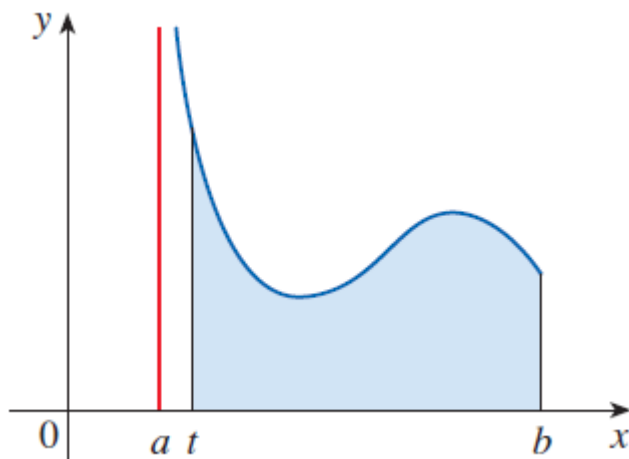
Definice. (a) Necht' má funkce f integrál $\int_a^t f(x) dx$ pro každé $t \in \langle a, b \rangle$ a necht' má funkce f vertikální asymptotu pro $x = b$ (Viz obrázek.) Pokud existuje konečná limita $\lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f(x) dx$, pak definujeme:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f(x) dx.$$



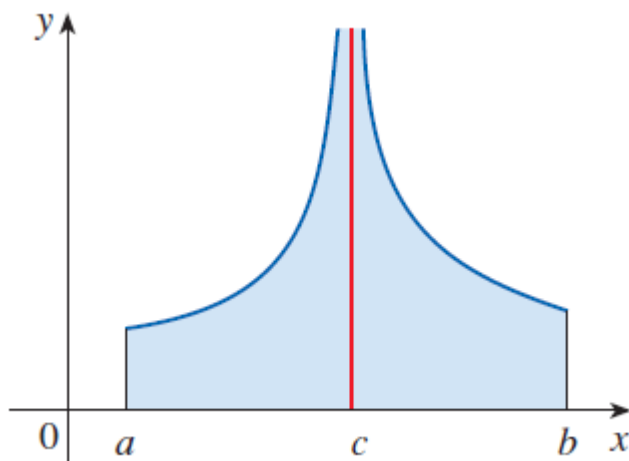
(b) Necht' má funkce f integrál $\int_t^b f(x) dx$ pro každé $t \in (a, b)$ a necht' má funkce f vertikální asymptotu pro $x = a$ (Viz obrázek.) Pokud existuje konečná limita $\lim_{t \rightarrow a+} \int_t^b f(x) dx$, pak definujeme:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a+} \int_t^b f(x) dx.$$



(c) Necht' $a < c < b$ a necht' integrály $\int_a^c f(x) dx$ a $\int_c^b f(x) dx$ jsou konvergentní. Pak definujeme:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$



Příklad: Vyšetřeme konvergenci nevlastního integrálu $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$.

Řešení. Podotkněme, že funkce $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ má vertikální asymptotu v bodě $x = 2$. Funkce f je tedy nespojitá v levém krajním bodě intervalu $\langle 2, 5 \rangle$. Nyní budeme aplikovat část (b) z definice:

$$\begin{aligned}
 \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t \rightarrow 2+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 2+} \left[2\sqrt{x-2} \right]_t^5 \\
 &= \lim_{t \rightarrow 2+} 2(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}) = 2\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

```

In [ ]: # Zobražíme graf funkce  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ 
# pomocí sympy a matplotlib
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math, Latex

display(Math(r"f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}"))

# vytvoříme 100 hodnot x v intervalu [a,b], kde a = 2.0001 a b = 5.0
a = 2.0001
b = 5.0
x_values = np.linspace(a, b, 100)
y = 1 / np.sqrt(x_values - 2) # použijeme numpy pro výpočet hodnot y

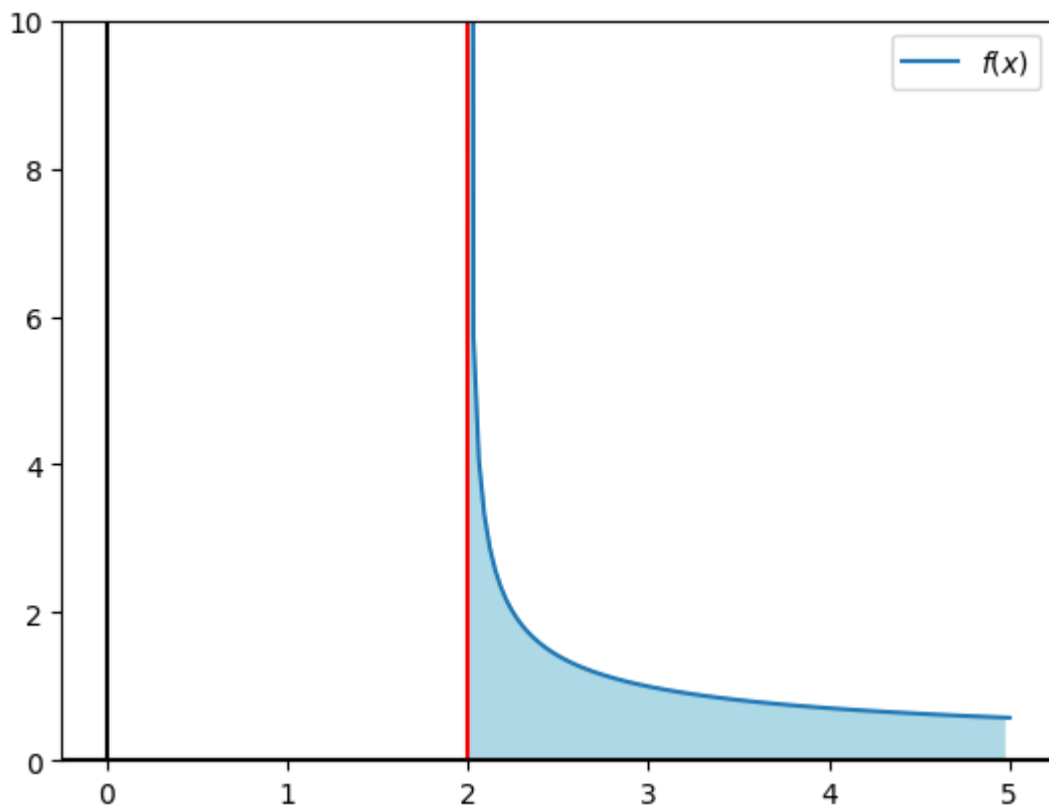
plt.plot(x_values, y, label=r"$f(x)$") # r"" znamená, že řetězec je raw string
# přidejme plot přímky x = 2
plt.axvline(x=2, color='r')
# vyšrafujme plochu pod grafem na intervalu (2, 5)
plt.fill_between(x_values, y, where=(x_values > 2) & (x_values < 5), color='lightblue')

plt.legend()
plt.ylim(0, 10) # nastavíme rozsah osy y
# přidejme plot obou os
plt.axhline(y=0, color='k')
plt.axvline(x=0, color='k')

plt.show() # zobrazíme graf

```

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$



Taylorův polynom

Definice. Mějme funkci f na intervalu (a, b) a bod $x_0 \in (a, b)$. Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 n -tou derivaci $f^{(n)}(x_0)$. Potom polynom

$$P_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se nazývá **Taylorův polynom** nejvýše n -tého stupně funkce f v bodě x_0 .

Věta. Platí $P_n(x_0) = f(x_0)$ a $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ pro $k = 0, 1, \dots, n$.

```
In [ ]: # Napišme program, který najde Taylorův polynom P_n(x) pro funkci f(x) v bodě x
# a poté vykreslí graf funkce f(x) a jejího Taylorova polynomu P_n(x) v interval
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math, Latex

sp.init_printing(use_latex='mathjax')

x = sp.Symbol('x')
f = sp.sin(x)
x0 = 0
n = 5

# Zobrazíme předpis funkce y = f(x)
display(Math(r"f(x) = %s" % sp.latex(f)))

# vytvoříme Taylorův polynom P_n(x) pro funkci f(x) v bodě x = x_0
P = sp.series(f, x, x0, n).removeO()
```

```

# zobrazíme předpis Taylorova polynomu  $P_n(x)$ 
display(Math(r"P_%s(x) = %s" % (n, sp.latex(P))))

# vytvoříme funkci  $P_n(x)$  z Taylorova polynomu  $P_n(x)$ 
P_func = sp.lambdify(x, P, 'numpy')

# vytvoříme funkci  $f(x)$ 
f_func = sp.lambdify(x, f, 'numpy')

# vytvoříme interval  $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ 
x_values = np.linspace(x0 - 2, x0 + 2, 100)

# vypočteme hodnoty funkce  $f(x)$  a jejího Taylorova polynomu  $P_n(x)$  v intervalu [
y1 = f_func(x_values)
y2 = P_func(x_values)

# vykreslíme graf
plt.plot(x_values, y1, label=r"$f(x)$")
plt.plot(x_values, y2, label=r"$P_%d(x)$" % n)

# zobrazíme bod dotyku  $[x_0, f(x_0)]$ 
plt.plot(x0, f_func(x0), 'o', color='black')

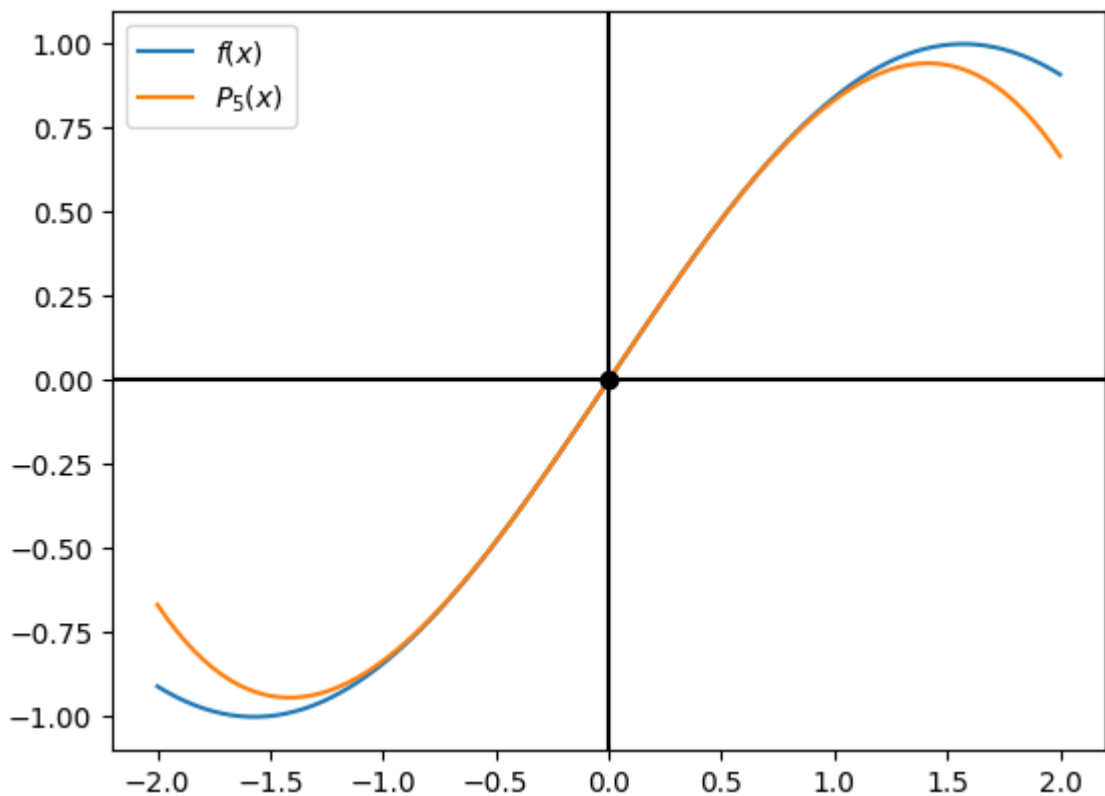
# zobrazíme osy  $x$  a  $y$ 
plt.axhline(y=0, color='k')
plt.axvline(x=0, color='k')

plt.legend()
plt.show()

```

$$f(x) = \sin(x)$$

$$P_5(x) = -\frac{x^3}{6} + x$$



Věta (B. Taylor, 1715). Necht' $n \in \mathbb{N}$ a $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ má spojité derivace $f^{(k)}$ pro $k = 0, 1, \dots, n$ na intervalu (a, b) a derivace $f^{(n+1)}$ existuje na intervalu (a, b) . Jestliže pak $x_0 \in (a, b)$, potom pro každé $x \in (a, b)$ existuje bod c ležící mezi x_0 a x a platí:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor%27s_theorem

Důkaz. Mecht' jsou body x, x_0 libovolně zvoleny v intervalu (a, b) . Dále necht' J označuje uzavřený interval, jehož krajní body jsou x_0 a x . Potom pro každé $t \in J$ položíme:

$$F(t) := f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

Potom platí:

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

Nyní definujme na intervalu J funkci G předpisem:

$$G(t) := F(t) - \left(\frac{x - t}{x - x_0} \right)^{n+1} F(x_0), \quad t \in J.$$

Dále z definice funkce $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ vyplývá, že splňuje předpoklady Rolleovy věty. Proto existuje bod $c \in \text{int}(J)$, pro který platí:

$$0 = G'(c) = F'(c) + (n+1) \frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}} F(x_0).$$

Z posledního vyjádření plyne:

$$\begin{aligned} F(x_0) &= -\frac{1}{n+1} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n} F'(c) \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n} \frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Odsud již vyplývá dokazované tvrzení. $\square$

Pro tzv. **zbytek v Lagrangeově tvaru** zavedeme označení:

$$R_n(x) := f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

Věta (Zbytek v integrální formě). Předpokládejme, že funkce f má na intervalu $I = \langle a, b \rangle$ derivace $f^{(k)}$ pro $k = 1, 2, \dots, n+1$ a derivace $f^{(n+1)}$ má Riemannův integrál na I . Potom platí:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (b-a) + \frac{f''(a)}{2!} (b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + R_n, \quad (a)$$

kde R_n je zbytek ve tvaru:

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) \cdot (b-t)^n dt. \quad (b)$$

Důkaz. Pokud budeme aplikovat integraci metodou per partes na integrál z (b), dostaneme:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) \cdot (b-t)^n dt \\ &= \frac{1}{n!} \left[f^{(n)}(t) \cdot (b-t)^n \right]_a^b + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b f^{(n)}(t) \cdot (b-t)^{n-1} dt \\ &= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b f^{(n)}(t) \cdot (b-t)^{n-1} dt \end{aligned}$$

Opětovným použitím integrace metodou per partes pak dostaneme dokazovanou rovnost (a). $\square$

Příklad. Najděme aproximaci funkce $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ pomocí Taylorova polynomu $P_2(x)$ v bodě $x_0 = 0$ a kde $x > -1$.

Řešení.

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \implies f'(0) = \frac{1}{3}$$
$$f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \implies f''(0) = -\frac{2}{9}.$$

Potom

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + R_2(x),$$

kde $R_2(x) = \frac{1}{3!} f'''(c)x^3 = \frac{5}{81}(1+c)^{-8/3}x^3$ pro nějaký bod c ležící mezi 0 a x .

Nyní odhadněme velikost zbytku $R_2(x)$ pro $x = 0.3$. Potom lze vyčíslit $P_2(0.3) = 1.09$ což je aproximace funkční hodnoty $f(0.3) = \sqrt[3]{1.3}$. Protože je nyní $c > 0$, platí odhad: $(1+c)^{-8/3} < 1$ a proto

$$R_2(0.3) < \frac{5}{81}0.3^3 = \frac{1}{600}.$$

Příklad. Vypočítejme hodnotu e s přesností na 5 desetinných míst pomocí Taylorova polynomu.

Řešení. Uvažujme funkci $f(x) = e^x$. Najděme pak Taylorův polynom $P_n(x)$ v bodě $x_0 = 0$. Protože $f^{(k)}(x) = e^x$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$, lze zjistit, že

$$f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Potom máme:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Nyní pro $x = 1$ hledjme n takové, že $|P_n(1) - e| < 10^{-5}$. Tedy

$$|R_n(1)| < 10^{-5}.$$

Pokud použijeme Lagrangeův zbytek, dostaneme:

$$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!},$$

kde $0 < c < 1$. Protože $e^c < 3$, hledjme n takové, že $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$. Odtud lze zjistit, že $n = 8$.

```
In [ ]: # napíšme funkci, která vrací hodnotu výrazu 3 / (n + 1)!
import sympy as sp
```

```
def f(n):
    return 3 / sp.factorial(n + 1)

n = 1
while True:
    if f(n) < 10**(-5):
        break
    n += 1

print("n = ", n)
```

n = 8

Tedy

$$e \approx P_8(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} = 2.71828.$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Příklad. Ukažme s pomocí Taylorovy věty, že pro $x > 0$ platí $e^x > 1 + x$. Odtud vyvodíme nerovnost

$$e^\pi > \pi^e.$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Řešení. Jak již víme z předchozího příkladu, platí:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

kde $R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}$ pro nějaké $0 < c < x$. Odtud plyne:

$$e^x = P_1(x) + R_1(x) = 1 + x + R_1(x) = 1 + x + \frac{e^c}{2!}x^2 > 1 + x,$$

neboť je $\frac{e^c}{2!}x^2 > 0$.

```
In [ ]: # vytvořme nyní graf funkce y = e^x a y = 1 + x
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math, Latex

sp.init_printing(use_latex='mathjax')

x = sp.Symbol('x')
f = sp.exp(x)
g = 1 + x

a = 0
```

```

b = 10

x_values = np.linspace(a, b, 100) # vytvoříme 100 hodnot x v intervalu [a,b]

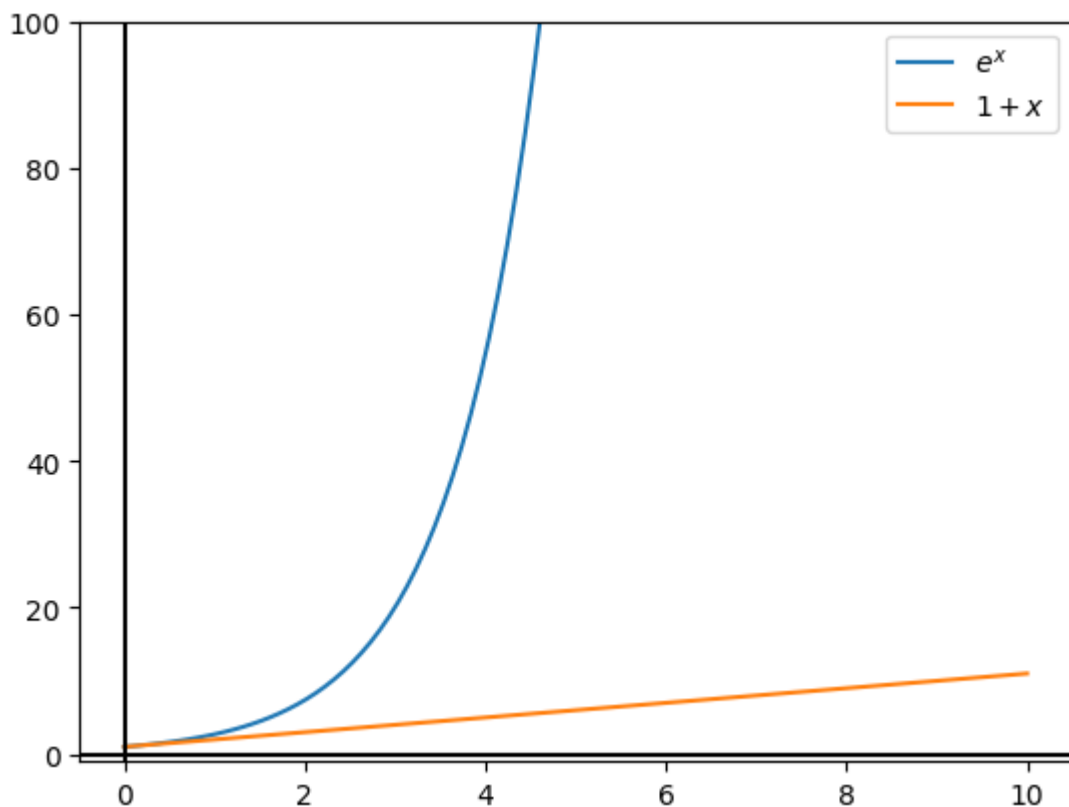
y1 = [f.subs(x, x1) for x1 in x_values] # vypočítáme hodnoty funkce f(x) pro ka
y1 = np.array(y1) # převedeme na numpy pole

y2 = [g.subs(x, x1) for x1 in x_values]
y2 = np.array(y2) # převedeme na numpy pole

plt.plot(x_values, y1, label=r"$e^x$") # vykreslíme graf funkce f(x)
plt.plot(x_values, y2, label=r"$1 + x$") # vykreslíme graf funkce g(x)
plt.legend() # zobrazíme legendu
plt.ylim(-1, 100) # nastavíme rozsah osy ybb
# přidejme plot obou os
plt.axhline(y=0, color='k')
plt.axvline(x=0, color='k')

plt.show() # zobrazíme graf

```



Protože jak víme $\pi > e$, máme $x = \pi/e - 1 > 0$. Tedy

$$e^{\pi/e-1} > 1 + (\pi/e - 1) = \pi/e.$$

To implikuje, že $e^{\pi/e} > (\pi/e)e = \pi$. Tudíž $e^\pi > \pi^e$. $\square$