

Nekonečné číselné řady

Základní definice

Definice 1. Uvažujme číselnou posloupnost $X = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Potom výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad (1)$$

budeme nazývat **nekonečnou číselnou řadou**. Pro označení řady použijeme symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ nebo zkráceně } \sum a_n.$$

S nekonečnou číselnou řadou $\sum a_n$ je spojena tzv. **posloupnost částečných součtů**

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Definice. Uvažujme nekonečnou číselnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, s_n nechť označuje tzv. **n-tý částečný součet** daný vztahem

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Je-li posloupnost částečných součtů s_n **konvergentní** a $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **konvergentní** a limitu s nazýváme **součtem řady**. Je-li posloupnost částečných součtů divergentní, pak řadu nazýváme **divergentní**.

Pokud je limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ rovna $\pm\infty$, pak říkáme, že řada **diverguje k** $\pm\infty$.

Jestliže limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ neexistuje, pak říkáme, že řada **osciluje**.

Příklad. Uvažme posloupnost čísel $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Zjistíme, zda je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a případně spočítáme její součet.

Řešení. Zjistíme, zda je posloupnost částečných součtů s_n konvergentní. Pro $n \in \mathbb{N}$ máme

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Každý člen $\frac{1}{i(i+1)}$ lze rozložit na rozdíl dvou parciálních zlomků:

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}.$$

Potom máme:

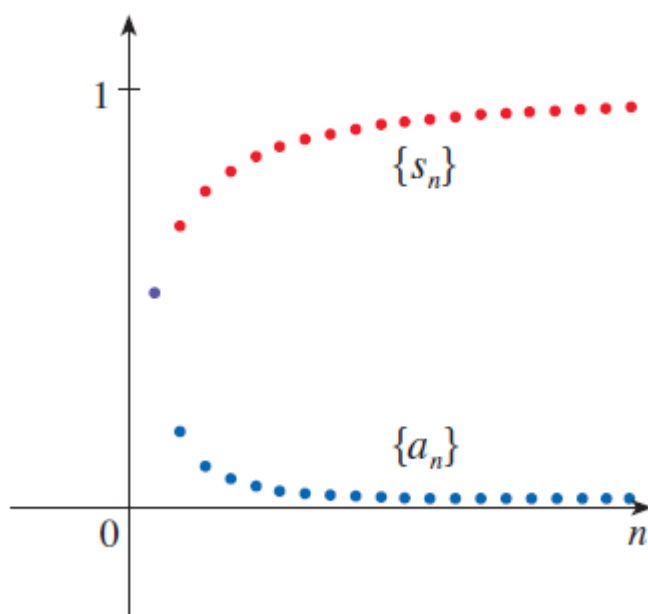
$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1$$

Odtud vyplývá pro součet:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$



Suma geometrické řady

Důležitým příkladem nekonečné geometrické řady je tzv. **geometrická řada**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

Parametr q je tzv. **kvocient** geometrické řady. Je-li $a \neq 0$ a $q = 1$, pak

$s_n = a + a + a + \dots = na$ a $s_n \rightarrow \pm\infty$. Neboť je v tomto případě je posloupnost částečných součtů divergentní, je divergentní i geometrická řada. Je-li $a = 0$, pak $s_n = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$ a $s_n \rightarrow 0$.

Je-li $q \neq 1$, pak

$$\begin{aligned} s_n &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} \\ qs_n &= 0 + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + aq^n \end{aligned}$$

Pokud od první rovnice odečteme druhou rovnici, obdržíme:

$$s_n - qs_n = a - aq^n = a(1 - q^n).$$

Nyní lze vyjádřit s_n v uzavřeném tvaru:

$$s_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Pokud $|q| < 1$, pak $q^n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$ a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}.$$

Je-li tedy $|q| < 1$, pak je geometrická řada konvergentní a pro její součet platí:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1 - q}.$$

Příklad. Najděme součet geometrické řady

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \dots$$

Řešení. Prvním členem je $a = 5$, kvocientem je $q = -\frac{2}{3}$. Protože $|q| < 1$, geometrická řada je konvergentní a její součet je

$$s = \frac{a}{1 - q} = \frac{5}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3.$$

Příklad. Vyšetřeme konvergenci resp. divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}.$$

Řešení. Vyjádřeme n -tý člen řady ve tvaru aq^{n-1} :

$$2^{2n}3^{1-n} = (2^2)^n 3^{-(n-1)} = \frac{4^n}{3^{n-1}} = 4 \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1}.$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1}.$$

Druhou metodou jak určit parametry a a q geometrické řady je rozepsání sumy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = 4 + \frac{16}{3} + \frac{64}{9} + \frac{256}{27} + \dots$$

Z předchozího plyne, že $a = 4$ a $q = \frac{4}{3}$. Protože $|q| > 1$, geometrická řada je divergentní.

Harmonická řada

Harmonickou řadou nazýváme řadu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Tato řada je divergentní.

Důkaz. Uvažujme vybranou posloupnost částečných součtů: $s_2, s_4, s_6, \dots$. Potom

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = 1 + \frac{2}{2}$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$$

$$s_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} \right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}$$

Obecně lze ukázat, že

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Odtud plyne: $s_{2^n} \rightarrow \infty$ pro $n \rightarrow \infty$. Tedy $s_n \rightarrow \infty$ pro $n \rightarrow \infty$. Řada je tudíž divergentní.

Základní vlastnosti konvergentních řad

Věta. Pokud je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Důkaz. Pro $n \geq 2$ platí: $a_n = s_n - s_{n-1}$. Z konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne: $s_n \rightarrow s$. Z toho plyne: $s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0$. Tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. $\square$

Příklad. Uvažujme nekonečnou řadu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Poznámka. Předchozí větu nelze obrátit jak lze demonstrovat na příkladu harmonické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Tato řada diverguje, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Předchozí věta je tedy pouze **nutnou podmínkou** konvergence řady.

Příklad. Dokažme divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}.$$

Řešení.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5 + \frac{4}{n^2}} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Neboť pro tuto řadu není splněna nutná podmínka konvergence, je řada tudíž divergentní. $\square$

Věta. Předpokládejme, že řady $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou konvergentní. Pak konvergují i řady $\sum ca_n$ (kde c je konstanta), $\sum(a_n + b_n)$, $\sum(a_n - b_n)$ a platí:

$$(i) \sum ca_n = c \sum a_n,$$

$$(ii) \sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n,$$

$$(iii) \sum(a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n.$$

Důkaz. Dokažme např. část (ii). Ostatní dvě části se dokazují podobně. Položme:

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i, \quad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad t_n = \sum_{i=1}^n b_i, \quad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Jestliže pak $u_n = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$, pak $u_n = s_n + t_n$. Z konvergence řad $\sum a_n$ a $\sum b_n$ plyne: $s_n + t_n \rightarrow s + t$. Tedy $u_n \rightarrow s + t$. Tedy $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$. $\square$

Příklad. Najděme součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right).$$

Řešení. Nejdříve určíme součty řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 3 \cdot 1 = 3.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Nyní podle předchozí věty, části (ii), daná řada konverguje a její součet je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) = 3 + 1 = 4.$$

Integrální test konvergence řady

Věta. Necht' $\{a_n\}$ je klesající nezáporná posloupnost, $n \geq 1$, a $f(x)$ je klesající, spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[1, \infty)$, taková že $f(n) = a_n$. Potom číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konverguje.

Zde máme tři jednoduché příklady, na které můžeme aplikovat Integrální test konvergence číselné řady:

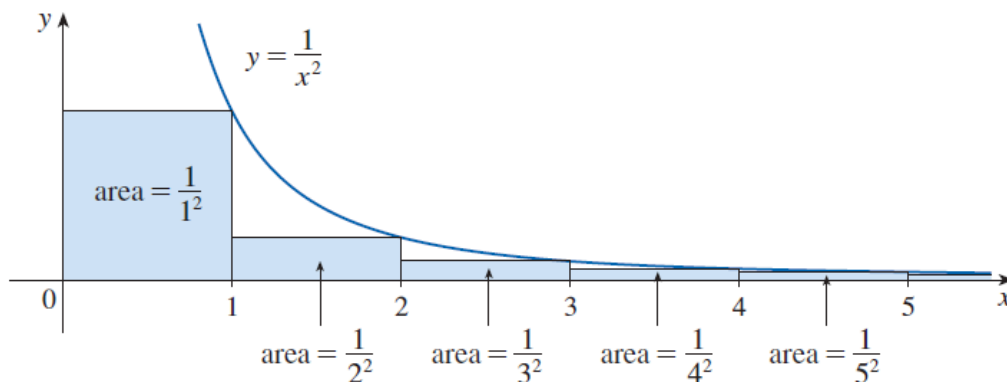
Příklad 1: Ověřme konvergenci číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Příklad 2: Ověřme konvergenci číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Příklad 3: Ověřme konvergenci číselné řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

V každém příkladu si nejprve najdeme odpovídající klesající, spojitou a nezápornou funkci $f(x)$, která splňuje podmínky Integrálního testu. Poté spočítáme nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x) dx$ a určíme, zda konverguje či diverguje. Na základě výsledku integrálu můžeme poté určit, zda číselná řada konverguje nebo diverguje.

Okomentujme nejdříve Příklad 1. Všimněme si následujícího obrázku:



Je zřejmé, že suma obsahů jednotlivých obdélníků je rovna sumě:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Dále je zřejmé, že pro každý částečný součet této číselné řady platí horní odhad:

$$s_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{1^2} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 2.$$

Tedy posloupnost částečných součtů $\{s_k\}$ je rostoucí a shora omezenou posloupností. Tudíž je posloupnost $\{s_k\}$ konvergentní. To znamená, že daná řada je konvergentní. $\square$

Poznámka. L. Euler dokázal, že platí pro součet této řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

konec 26.3.

Řešme jako ukázkou aplikace integrálního kritéria Příklad 3. Chceme ověřit konvergenci číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$. Nejprve najdeme odpovídající klesající, spojitou a nezápornou funkci $f(x)$, která splňuje podmínky Integrálního testu:

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}, \text{ kde } x \geq 2 \text{ (pro } x = 1 \text{ není funkce definována, protože } \ln 1 = 0 \text{)}.$$

Nyní spočítáme nevlastní integrál $\int_2^{\infty} f(x) dx$:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx.$$

Pro řešení tohoto integrálu použijeme substituci $u = \ln x$, což znamená, že $du = \frac{1}{x} dx$. Také upravíme meze integrace:

Když $x = 2$, pak $u = \ln 2$. Když $x \rightarrow \infty$, pak $u \rightarrow \infty$. Integrál poté vypadá takto:

$$\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{u^2}, du.$$

Tento integrál je nyní jednodušší a můžeme ho řešit pomocí pravidla pro integraci mocninných funkcí:

$$\int u^n, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \text{ kde } n \neq -1.$$

Použijeme toto pravidlo na náš integrál:

$$\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{u^2}, du = \left[-\frac{1}{u} \right]_{\ln 2}^{\infty}.$$

Nyní zjistíme hodnotu integrálu v mezních hodnotách:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{u} \right) - \left(-\frac{1}{\ln 2} \right) = 0 - \left(-\frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Protože nevlastní integrál $\int_2^{\infty} f(x), dx$ konverguje, číselná řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ také konverguje podle Integrálního testu konvergence.

Věta. Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní řadou.

Důkaz. Pro důkaz divergence užijeme Integrálního testu konvergence. Nejprve najdeme odpovídající klesající, spojitou a nezápornou funkci $f(x)$, která splňuje podmínky Integrálního testu:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \geq 1.$$

Nyní spočítáme nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x), dx$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}, dx = [\ln x]_1^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} [(\ln t) - (\ln 1)] = \infty - 0 = \infty.$$

Protože nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x), dx$ diverguje, číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ také diverguje podle Integrálního testu konvergence. $\square$

Příklad. Pomocí integrálního kritéria zjistěte, zda je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ konvergentní nebo divergentní.

Řešení. Nejprve najdeme odpovídající klesající, spojitou a nezápornou funkci $f(x)$, která splňuje podmínky Integrálního testu:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x \geq 1.$$

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty.\end{aligned}$$

Je zřejmé, že pro $x > 1$ je $f(x) > 0$ a f je zde spojitou funkcí. Zřejmé ovšem není, jak je to s monotónností $f(x)$. Zkusíme tedy vypočítat derivaci $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Z tohoto výrazu je zřejmé, že $f'(x) < 0$ pro $x > 1$. Tedy $f(x)$ je klesající funkce. Nyní spočítáme nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x) dx$:

Protože uvedený nevlastní integrál diverguje, číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ také diverguje podle Integrálního testu konvergence. $\square$

Věta (Odhad zbytku řady). Pokud je $f(k) = a_k$, kde f je spojitá, kladná a klesající funkce pro $x \geq n$ a řada $\sum a_n$ je konvergentní, pak je-li $R_n = s - s_n$, potom

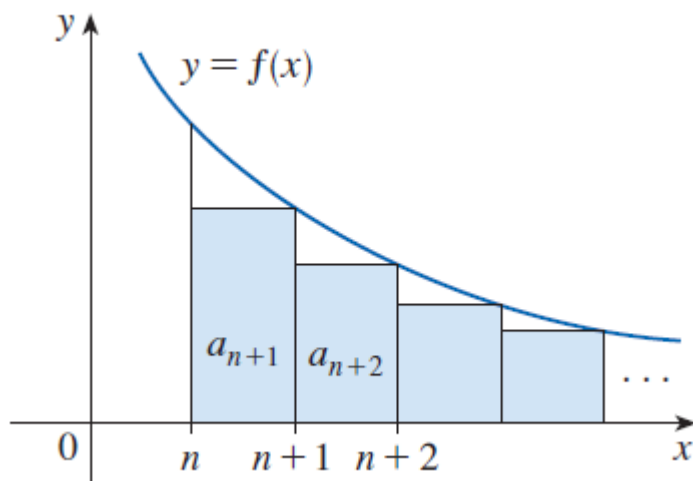
$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx.$$

Důkaz. Zde je

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots$$

Potom jak ukazuje obrázek dole, platí:

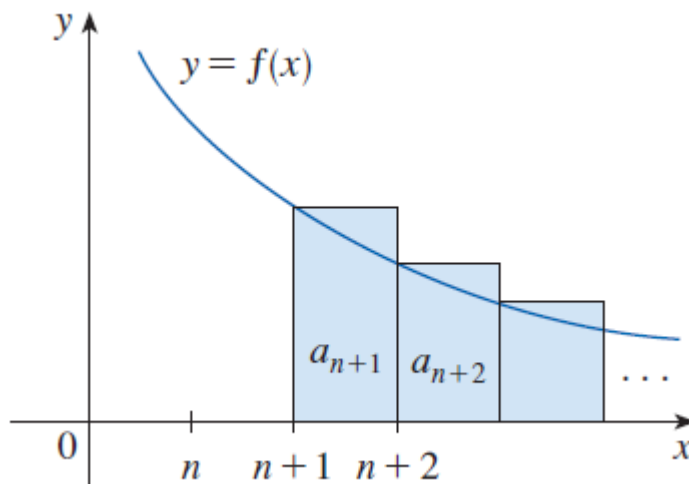
$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots \leq \int_n^{\infty} f(x) dx.$$



Dále platí:

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \geq \int_{n+1}^{\infty} f(x) dx.$$

Viz následující obrázek.



Příklad. Jak je možné snadno zjistit použitím integrálního kritéria, řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

je konvergentní.

(a) Aproximujme součet této řady pomocí sumy jejích deseti prvních členů:

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{10^3}.$$

Potom odhadněme chybu, která nastane při použití této aproximace.

(b) Kolik členů řady je potřeba použít, aby byla chyba menší než 5×10^{-4} ?

Řešení. Budeme pro řešení obou částí vypočítat nevlastní integrál $\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$.

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_n^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2n^2}.$$

(a) Aproximujme součet této řady pomocí sumy jejích deseti prvních členů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx s_{10} = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} \approx 1.1975.$$

Potom podle věty o odhadu zbytku řady odhadněme chybu, která nastane při použití této aproximace:

$$R_{10} \leq \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{200} = 0.005.$$

(b) Abychom dosáhli přesnosti 5×10^{-4} , znamená to, že chceme, aby pro n dostatečně velké platilo:

$$R_n \leq 5 \times 10^{-4}.$$

Neboť je

$$R_n \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2n^2},$$

potřebujeme, aby platilo:

$$\frac{1}{2n^2} \leq 5 \times 10^{-4}.$$

```
In [ ]: # Napišme skript, kde najdeme nejmenší n
# takové, že bude platit podmínka: 1 / (2*n**2) < 5*10**(-4)
import sympy as sp
n = 1
while True:
    if 1 / (2*n**2) <= 5*10**(-4):
        break
    n += 1

print("n = ", n)
```

n = 32

Podle výše uvedeného numerického experimentu je tedy potřeba použít $n = 32$ členů řady, aby byla chyba menší než 5×10^{-4} . □

Poznámka. Pokud se vrátíme k odhadu zbytku řady

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx,$$

pak s využitím vztahu $s_n + R_n = s$ dostaneme snadno z předchozích odhadů:

$$\boxed{s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x) dx \leq s \leq s_n + \int_n^{\infty} f(x) dx.} \quad (*)$$

Příklad. Využijme odhady (*) a částečný součet s_{10} řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ k odhadu součtu této řady.

Řešení. Podle výše uvedeného odhadu (*):

$$s_{10} + \int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx \leq s \leq s_{10} + \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx.$$

Jak již víme,

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2n^2},$$

tudíž platí:

$$s_{10} + \frac{1}{2(11)^2} \leq s \leq s_{10} + \frac{1}{2(10)^2}.$$

Užitím hodnoty $s_{10} \approx 1.197532$, dostaneme:

$$1.201664 \leq s \leq 1.202532.$$

Pokud budeme například aproximovat součet pomocí středu tohoto intervalu, dostaneme:

$$s \approx \frac{1.201664 + 1.202532}{2} = 1.2021,$$

s chybou menší než je polovina délky intervalu, tedy 0.0005. Vidíme tedy, že k docílení chyby menší než 5×10^{-4} stačí použít pouze deset členů řady. $\square$

Srovnávací kritérium

Věta. Předpokládejme, že řady $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou řady s nezápornými členy.

(i) Pokud je $\sum b_n$ konvergentní a pro každé n platí $a_n \leq b_n$, pak je $\sum a_n$ konvergentní.

(ii) Pokud je $\sum b_n$ divergentní a pro každé n platí $a_n \geq b_n$, pak je $\sum a_n$ divergentní.

Důkaz. Důkaz proveďte sami. $\square$

Věta. (i) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ je konvergentní pro $p > 1$.

(ii) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ je divergentní pro $p \leq 1$.

(iii) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ je konvergentní, právě tehdy, když $|q| < 1$.

Příklad. Zjistěte, zda je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$ konvergentní nebo je divergentní.

Řešení. Podle věty o srovnávacím kritériu je řada konvergentní. Srovnajme danou řadu s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2}$, která je konvergentní. Platí totiž

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} \leq \frac{5}{2n^2},$$

pro každé n . Nerovnost je zřejmě platná neboť je jmenovatel na levé straně větší než je jmenovatel na pravé straně. Dále víme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Odtud s využitím věty o srovnávacím kritériu (část (i)) vyplývá, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$ je konvergentní. $\square$

Poznámka. Podmínky $a_n \leq b_n$ resp. $a_n \geq b_n$ ověřit pro $n \geq N$, kde N je dostatečně velké fixované přirozené číslo.

Příklad. Zjistěte, zda je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ konvergentní nebo je divergentní.

Řešení. Snadno zde zjistíme, že $\ln k > 1$ pro každé $k \geq 3$. Tedy platí:

$$\frac{\ln k}{k} > \frac{1}{k}, \quad k \geq 3.$$

Jelikož jak víme, tak řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ je divergentní, tak i řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ je divergentní. $\square$

Alternující řady a pojem absolutní konvergence

Alternující řadou nebo **řadou se střídavými znaménky** rozumíme řadu, jejíž členy střídají znaménka. Například jsou to tyto řady:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2,$$

nebo

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \frac{7}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}.$$

Z uvedených příkladů je patrné, že pro členy těchto řad a_n platí

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n, \text{ resp. } a_n = (-1)^n b_n,$$

kde $b_n > 0$.

Věta (Leibnizovo kritérium). Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \quad (b_n > 0)$$

splňující podmínky:

(i) $b_{n+1} \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

je konvergentní.

Příklad. Uvažujme alternující řadu:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Dokažme, že tato (Leibnizova) řada je konvergentní.

(i) $b_{n+1} \leq b_n$ neboť $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ pro každé $n \geq 1$.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ neboť $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Tedy daná řada splňuje podmínky (i) a (ii) a je konvergentní. $\square$

Příklad. Uvažujme alternující řadu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}.$$

Nyní $b_n = \frac{3n}{4n-1}$. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4n}} = \frac{3}{4}.$$

Tudíž nelze aplikovat Leibniho kritérium. Ověřme dále, zdali je splněna nutná podmínka konvergence $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{3n}{4n-1}.$$

Tato limita ovšem neexistuje. Tedy daná řada je divergentní. $\square$

Pojem absolutní konvergence

Je-li dána řada $\sum a_n$, potom uvažujme řadu absolutních hodnot:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots$$

Definice. Řada $\sum a_n$ se nazývá **absolutně konvergentní**, pokud je řada absolutních hodnot $\sum |a_n|$ konvergentní.

Příklad. Uvažujme alternující řadu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \dots$$

Tato řada je absolutně konvergentní, jelikož odpovídající řada absolutních hodnot

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} \right| = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

konverguje. Tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ je absolutně konvergentní. $\square$

Věta. Je-li řada $\sum a_n$ absolutně konvergentní, pak je tato řada konvergentní.

Příklad. Uvažujme řadu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \frac{\cos 4}{4^2} + \dots$$

Jelikož pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \frac{\cos n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

tak podle srovnávacího testu lze říci, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ je absolutně konvergentní. Tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ je konvergentní. $\square$

Podílové a odmocninové kritérium

Věta. (i) Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, pak řada $\sum a_n$ je absolutně konvergentní (a také konvergentní).

(ii) Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$, nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, pak řada $\sum a_n$ je divergentní.

(iii) Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, pak řada $\sum a_n$ je konvergentní nebo divergentní a nelze učinit žádné jednoznačné závěry ohledně konvergence řady $\sum a_n$.

Příklad. Vyšetřeme konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}.$$

Řešení. Užijme podílové kritérium, kde $a_n = (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^3}{3^n}} \right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 \rightarrow \frac{1}{3} < 1. \end{aligned}$$

Z podílového kritéria pak vyplývá, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ je absolutně konvergentní. $\square$

Příklad. Vyšetřeme konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Řešení. Užijme podílové kritérium, kde $a_n = \frac{n^n}{n!}$:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)!n!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e, \quad \text{pro } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Protože $e > 1$, tak podle podílového kritéria řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ je divergentní. $\square$

Poznámka. Divergence plyne také z tzv. nutné podmínky, jelikož platí:

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \geq n.$$

Tedy posloupnost a_n nekonverguje k 0 pro $n \rightarrow \infty$. Tudíž řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ je divergentní.

Příklad. Vyšetřeme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ s využitím podílového kritéria. Nyní $a_n = \frac{1}{n}$.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1, \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Zde tedy nelze použít podílové kritérium. $\square$

Věta. (i) Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, pak řada $\sum a_n$ je absolutně konvergentní (a také konvergentní).

(ii) Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$, nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, pak řada $\sum a_n$ je divergentní.

(iii) Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, pak nelze podle odmocninového kritéria rozhodnout o konvergenci či divergenci řady $\sum a_n$.

Příklad. Vyšetřeme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^n$ s využitím odmocninového kritéria.

Řešení. Zde

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^n.$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^{\frac{n}{n}} = \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^1 = \frac{2n+3}{3n+2} \rightarrow \frac{2}{3} < 1.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^n$ je tedy absolutně konvergentní. $\square$

Příklad. Vyšetřeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Řešení. Zde

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Odtud plyne

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Protože poslední limita je rovna 1, nelze pro vyšetření konvergence či divergence použít odmocninové kritérium. Dále

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Jelikož je tato limita různá od 0, tak není splněna nutná podmínka pro konvergenci řady

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$. Tudíž daná řada je divergentní. $\square$