

Zkušební otázky z Matematické analýzy (MA2)

1. Primitivní funkce a neurčitý integrál

Pojem primitivní funkce představuje jeden z nejhlubších vhlédů matematické analýzy. Jeho strategický význam nespočívá pouze v technickém usnadnění výpočtů, ale v odhalení fundamentálního inverzního vztahu mezi operacemi derivování (analýza lokální změny) a integrování (akumulace globálního součtu). Zvládnutí tohoto konceptu je proto nezbytným předpokladem nejen pro aplikaci Newton-Leibnizovy formule, ale pro skutečné pochopení jednoty diferenciálního a integrálního počtu.

1. Definice primitivní funkce: Definujte primitivní funkci k funkci f na intervalu I . Uveďte příklad funkce a její primitivní funkce na základě textu (např. pro $f(x) = x^2$).
2. Množina primitivních funkcí: Jaký je vztah mezi dvěma primitivními funkcemi ke stejné funkci na daném intervalu? Jak lze vyjádřit libovolnou primitivní funkci $F(x)$, pokud známe jednu konkrétní primitivní funkci $F_0(x)$?
3. Definice neurčitého integrálu: Definujte neurčitý integrál $\int f(x) dx$. Jaký je jeho vztah k primitivní funkci?
4. Integrační metoda per partes: Odvoďte vzorec pro integraci metodou per partes z pravidla pro derivaci součinu dvou funkcí. Vysvětlete, jaká je strategická myšlenka této metody a aplikujte ji na příklad výpočtu z textu, například $\int \ln x dx$ nebo $\int t^2 e^t dt$.
5. Substituční metoda: Zformulujte přesně větu o substituci v neurčitém integrálu a vysvětlete, jaké jsou její předpoklady. Aplikujte ji na výpočet integrálu $\int \sqrt{2x+1} dx$ podle postupu v textu.
6. Integrace racionálních lomených funkcí: Jaký je obecný postup při integraci racionální lomené funkce $P(x)/Q(x)$? Vysvětlete, co znamená ryzí lomená funkce a jak se provádí rozklad na parciální zlomky pro různé typy kořenů polynomu ve jmenovateli (reálné různé, reálné násobné, a páry komplexně sdružených kořenů). Na jakém fundamentálním tvrzení z algebry je založena existence tohoto rozkladu? Uveďte příklad z textu.

Zvládnutí těchto algebraických technik je nezbytným nástrojem pro aplikaci integrálního počtu na konkrétní problémy, jak uvidíme v následující kapitole o určitém integrálu.

2. Určitý integrál

Určitý integrál, historicky motivovaný problémem výpočtu obsahu plochy pod křivkou, je formálně definován jako limita tzv. Riemannových integrálních součtů. Tento koncept představuje jeden z vrcholů matematické analýzy, neboť převádí intuitivní geometrickou myšlenku na rigorózní matematický objekt. Následující otázky testují pochopení této

definice, klíčových vlastností určitého integrálu a fundamentální věty, která jej elegantně propojuje s pojmem primitivní funkce.

1. Definice určitého integrálu: Definujte určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$ jako limitu Riemannových integrálních součtů. Vysvětlete pojmy ekvidistantní dělení intervalu, norma dělení, výběrové body a tvar Riemannova součtu $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$.
2. Geometrická interpretace: Jaká je geometrická interpretace určitého integrálu $\int_a^b f(x) dx$ v případě, že funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporná? Co integrál reprezentuje, pokud funkce nabývá i záporných hodnot?
3. Fundamentální věta integrálního počtu (Newton-Leibnizova formule): Zformulujte Newton-Leibnizovu formuli pro výpočet určitého integrálu. Jaké jsou její předpoklady? Uveďte příklad výpočtu z textu, například $\int_1^3 (x^2 + 2x - 4) dx$.
4. Vlastnosti určitého integrálu: Uveďte a vysvětlete základní vlastnosti určitého integrálu, konkrétně linearitu ($\int_a^b [cf(x) + dg(x)] dx$) a aditivitu vzhledem k mezím ($\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$).
5. Věta o substituci v určitém integrálu: Zformulujte větu o substituci pro určitý integrál. Zdůrazněte, jak se transformují meze integrace a proč je tento krok nezbytný. Demonstrujte na příkladu $\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx$.
6. Integrace per partes pro určitý integrál: Uveďte vzorec pro metodu per partes u určitého integrálu. Aplikujte jej na výpočet integrálu $\int_0^1 \arctan x dx$.
7. Vztah grafu funkce a její primitivní funkce: Na základě poskytnutého grafu derivace f' načrtněte možný graf funkce f . Vysvětlete, jak souvisí monotonie funkce f se znaménkem její derivace f' a jak souvisí konvexita/konkávita funkce f s monotonií f' .

Teoretický aparát určitého integrálu umožňuje přejít od abstraktních definic k řešení konkrétních problémů v geometrii, fyzice a dalších vědních oborech.

3. Aplikace integrálního počtu a nevlastní integrály

Koncept určitého integrálu se elegantně rozšiřuje na řešení praktických geometrických problémů, jako je výpočet obsahů složitějších rovinných obrazců nebo objemů rotačních těles. Dále je možné tento koncept zobecnit i pro případy, kdy integrujeme přes neomezený interval nebo funkci, která je na integračním intervalu neomezená. Tím se dostáváme k pojmu nevlastního integrálu, který je klíčový pro analýzu konvergence v mnoha oblastech matematiky.

1. Obsah plochy mezi křivkami: Jak se vypočítá obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = f(x)$ a $y = g(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$? Uveďte vzorec a aplikujte ho na příklad nalezení obsahu mezi křivkami $y = e^x$ a $y = x$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.
2. Objem rotačního tělesa: Odvoďte vzorec pro výpočet objemu tělesa, které vznikne rotací obrazce pod grafem funkce $y = f(x)$ kolem osy x na intervalu $\langle a, b \rangle$, s

využitím obecné metody řezů, kde řezem je kruh o obsahu $A(x) = \pi[f(x)]^2$. Vzorec je $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$. Uveďte příklad výpočtu z textu, například pro $y = \sqrt{x}$ na $\langle 0, 1 \rangle$.

3. Definice nevlastního integrálu vlivem meze: Definujte nevlastní integrál prvního druhu (s nekonečnou mezí), například $\int_a^\infty f(x) dx$. Co znamená, že takový integrál konverguje, respektive diverguje? Vypočtěte $\int_0^\infty e^{-3x} dx$.
4. Definice nevlastního integrálu vlivem integrandu: Definujte nevlastní integrál druhého druhu (s neomezeným integrandem), například pro funkci $f(x)$ neomezenou v bodě a na intervalu $\langle a, b \rangle$. Co znamená konvergence a divergence v tomto případě? Vypočtěte $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.
5. Singularita uvnitř intervalu: Jak postupujeme při výpočtu nevlastního integrálu, pokud je bod nespojitosti (singularita) uvnitř integračního intervalu, jako v případě $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$? Vysvětlete, proč tento integrál diverguje.

Od spojitých procesů popsaných integrací nyní přejdeme k jejich diskrétní analogii: součtům nekonečně mnoha členů, tedy k nekonečným řadám.

4. Nekonečné číselné řady

Nekonečná číselná řada představuje součet nekonečně mnoha členů číselné posloupnosti. Klíčovou otázkou, která v této souvislosti vyvstává, je otázka konvergence: má takový nekonečný součet konečnou hodnotu? K jejímu zodpovězení byla vyvinuta řada kritérií (testů), která umožňují analyzovat chování řady bez nutnosti explicitně sčítat její členy.

1. Definice konvergence řady: Definujte konvergenci a součet nekonečné číselné řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$ pomocí posloupnosti částečných součtů.
2. Geometrická a harmonická řada: Definujte geometrickou řadu. Pro jaké hodnoty kvocientu q konverguje a jaký je její součet? Proč harmonická řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ diverguje, i když splňuje nutnou podmínku konvergence?
3. Nutná podmínka konvergence: Zformulujte nutnou podmínku konvergence řady $\sum a_n$. Proč se jedná pouze o nutnou, nikoli postačující podmínku? Uveďte příklad řady, která tuto podmínku splňuje, ale přesto diverguje.
4. Integrální kritérium: Popište integrální kritérium pro vyšetřování konvergence řad s nezápornými členy. Jaké jsou předpoklady pro jeho použití? Vysvětlete pomocí náčrtku, jak souvisí hodnota nevlastního integrálu $\int_1^\infty f(x) dx$ s hodnotou součtu řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$, a proč je nerovnost $\sum_{n=2}^\infty a_n \leq \int_1^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=1}^\infty a_n$ intuitivně platná. Aplikujte kritérium k určení konvergence řady $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^2}$.
5. Srovnávací kritérium: Vysvětlete srovnávací kritérium pro řady s nezápornými členy. Použijte ho k důkazu konvergence řady $\sum_{n=1}^\infty \frac{5}{2n^2+4n+3}$.

6. Leibnizovo kritérium pro alternující řady: Jaké jsou podmínky Leibnizova kritéria pro konvergenci alternujících řad? Uveďte příklad řady, která konverguje podle tohoto kritéria, například $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
7. Absolutní a relativní konvergence: Definujte absolutní a relativní konvergenci řady. Jaký je vztah mezi absolutní konvergencí a konvergencí?
8. Podílové a odmocninové kritérium: Zformulujte podílové (d'Alembertovo) kritérium. Ve kterém případě toto kritérium selhává a nelze podle něj rozhodnout? Uveďte příklad aplikace, například na řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$.

Od číselných řad, kde sčítáme konstanty, nyní přecházíme k jejich mocnému zobecnění: funkčním řadám. Již se neptáme pouze, zda daný součet konverguje, ale pro jaké hodnoty proměnné x konverguje a jaké vlastnosti má výsledná funkce. Tím se nám otevírá zcela nový svět aproximace složitých funkcí pomocí „nekonečných polynomů“.

5. Mocninné a Taylorovy řady

Mocninné řady lze vnímat jako zobecnění polynomů na nekonečný stupeň. Představují mimořádně silný nástroj pro aproximaci komplikovaných funkcí pomocí jednodušších, "polynomiálních" výrazů. Klíčovými pojmy jsou zde poloměr konvergence, který určuje, pro jaké hodnoty proměnné x řada konverguje, a Taylorův rozvoj, který poskytuje systematický způsob, jak takovou řadu pro danou funkci zkonstruovat.

1. Definice mocninné řady a poloměr konvergence: Co je to mocninná řada se středem v bodě a ? Definujte poloměr a interval konvergence. Jak se vyšetřuje chování řady v krajních bodech intervalu konvergence?
2. Vlastnosti mocninných řad: Jaké jsou hlavní vlastnosti mocninných řad uvnitř jejich intervalu konvergence? Zejména se zaměřte na možnost derivování a integrování řady člen po členu.
3. Taylorova a Maclaurinova řada: Definujte Taylorovu řadu funkce $f(x)$ v bodě a . Jaký je vzorec pro její koeficienty? Co je to Maclaurinova řada?
4. Rozvoj elementárních funkcí: Uveďte Maclaurinovy rozvoje pro základní funkce: e^x , $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Jaké jsou jejich obory konvergence?
5. Aplikace Taylorových řad: Jak lze využít Maclaurinovy řady k výpočtu limit? Demonstrujte na příkladu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.
6. Aproximace integrálů: Vysvětlete, jak lze použít mocninné řady k aproximaci hodnot určitých integrálů, které nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Uveďte postup pro $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.
7. Zbytek v Taylorově rozvoji: Co reprezentuje zbytek $R_n(x)$ v Taylorově rozvoji? Uveďte Lagrangeův tvar zbytku a vysvětlete, jak se používá k odhadu chyby aproximace funkce Taylorovým polynomem.

Úspěšné zvládnutí odpovědí na výše uvedené otázky představuje solidní základ a dobrou přípravu pro úspěšné složení ústní zkoušky z matematické analýzy. Přeji mnoho zdaru.