

Otázky MA1

Soubor Otázek k Ústní Zkoušce z Matematické Analýzy 1

1.0 Základy: Reálná čísla a posloupnosti

1.1 Vlastnosti reálných čísel a matematická indukce

Tato úvodní kapitola se zaměřuje na samotné základy, na nichž je postavena celá budova matematické analýzy. Hluboké porozumění vlastnostem množiny reálných čísel – zejména pak axiomu o suprémumu, který zaručuje její „úplnost“, a Archimedově vlastnosti, která formalizuje naši intuici o nekonečnosti číselné osy – je naprosto nezbytné pro korektní pochopení klíčových konceptů, jako jsou limita a spojitost. Bez těchto základních stavebních kamenů by se jakákoli další konstrukce stala nestabilní.

- **Princip matematické indukce**

- Vysvětlete princip důkazu matematickou indukcí. Popište jeho dvě hlavní části – základní krok a indukční krok. Aplikujte tento princip na důkaz tvrzení, že pro každé přirozené číslo n platí: $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$.

- **Archimedova vlastnost**

- Definujte Archimedovu vlastnost množiny reálných čísel. Jaký je její klíčový důsledek pro množinu přirozených čísel a její omezenost?

- **Axiom o suprémumu a úplnost reálných čísel**

- Definujte pojmy: shora omezená množina, horní mez a suprémum množiny. Formulujte axiom o existenci supréma. Vysvětlete, v čem spočívá jeho význam pro úplnost množiny reálných čísel, a ilustруйте neúplnost množiny racionálních čísel na příkladu množiny $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$.

- **Trojúhelníková nerovnost**

- Dokažte trojúhelníkovou nerovnost $|a + b| \leq |a| + |b|$ pro libovolná reálná čísla a, b . V důkazu postupujte rozebráním jednotlivých případů

podle znamének čísel a a b .

Porozumění těmto fundamentálním vlastnostem nám umožňuje přejít od statického popisu čísel k dynamickému studiu procesů, jejichž základním nástrojem jsou posloupnosti a jejich konvergence.

1.2 Posloupnosti, limita a konvergence

Pojem limity posloupnosti představuje jeden z nejzákladnějších konceptů celé matematické analýzy. Je to první krok od konečné matematiky k matematice nekonečných procesů. Na precizní definici limity posloupnosti následně staví téměř vše, co následuje: limita funkce, derivace (jako limita podílu přírůstků) i Riemannův integrál (jako limita integrálních součtů).

- **Definice limity a její jednoznačnost**
 - Uveďte přesnou (ε - N) definici vlastní limity posloupnosti. Následně zformulujte a dokažte větu o jednoznačnosti limity.
- **Vlastnosti limit**
 - Formulujte větu o aritmetice limit, tj. pravidla pro výpočet limity součtu, součinu a podílu dvou konvergentních posloupností.
- **Věta o třech posloupnostech (o sevření)**
 - Uveďte znění Věty o třech posloupnostech. Aplikujte ji k důkazu tvrzení: Pokud $\lim |a_n| = 0$, pak také $\lim a_n = 0$.
- **Monotónní posloupnosti**
 - Definujte monotónní a omezenou posloupnost. Zformulujte a dokažte Větu o konvergenci monotónní a omezené posloupnosti. Která fundamentální vlastnost reálných čísel (axiom) probíraná v předchozí sekci je pro tento důkaz klíčová a proč?
- **Číslo e**
 - Dokažte, že posloupnost $a_n = (1 + 1/n)^n$ je rostoucí a shora omezená. Co z těchto dvou vlastností plyne pro její konvergenci?
- **Nevlastní limity**
 - Definujte nevlastní limitu posloupnosti rovnou $+\infty$ a $-\infty$.

Zatímco Věta o konvergenci monotónní posloupnosti zaručuje existenci limity za velmi specifických podmínek, pro hlubší analýzu vlastností konvergence, jako je

například zaručená existence konvergentních podposloupností v každé omezené posloupnosti, potřebujeme pokročilejší nástroje.

1.3 Bolzano-Weierstrassova věta a Cauchyovské posloupnosti

Tato sekce se věnuje dvěma klíčovým teoretickým nástrojům. Bolzano-Weierstrassova věta je silným existenčním tvrzením, které zaručuje, že v každé omezené posloupnosti (jakkoli chaoticky se chovající) lze vždy najít "ukotvenou" konvergentní podposloupnost. Na druhé straně Cauchyovo kritérium poskytuje ekvivalentní definici konvergence, která má obrovskou výhodu v tom, že pro ověření konvergence nepotřebujeme znát hodnotu limity předem.

- **Vybraná podposloupnost**
 - Definujte pojem vybrané podposloupnosti. Formulujte kritérium divergence posloupnosti pomocí dvou podposloupností s různými limitami a demonstруйте je na posloupnosti $a_n = (-1)^n$.
- **Bolzano-Weierstrassova věta**
 - Zformulujte znění Bolzano-Weierstrassovy věty. Popište hlavní myšlenku jejího důkazu, který se opírá o existenci monotónní podposloupnosti v každé reálné posloupnosti.
- **Cauchyovská posloupnost**
 - Uved'te přesnou definici Cauchyovské posloupnosti. Zdůvodněte, proč harmonická posloupnost $h_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ není Cauchyovská, a tudíž je divergentní.
- **Cauchyovo kritérium konvergence**
 - Formulujte Cauchyovo kritérium konvergence pro reálné posloupnosti. V čem spočívá jeho praktický význam oproti standardní definici limity?
- **Kontraktivní posloupnosti**
 - Definujte kontraktivní posloupnost. Uved'te větu, která tvrdí, že každá kontraktivní posloupnost je Cauchyovská, a tedy konvergentní.

Po prozkoumání chování diskrétních posloupností nyní přeneseme koncept limity na spojitý svět funkcí reálné proměnné, kde se jeho význam stává ještě centrálnějším.

2.0 Limita, spojitost a základní věty o funkcích

2.1 Limita funkce

Limita funkce je přirozeným zobecněním limity posloupnosti. Umožňuje nám precizně popsat a analyzovat chování funkce v těsném okolí bodu, aniž bychom se zajímali o její hodnotu přímo v tomto bodě. To je klíčové pro situace, kdy funkce v daném bodě není definována nebo se v něm chová "problematicky". Tento koncept otevírá dveře k definici spojitosti a následně i derivace.

- **Definice limity funkce**

- Uved'te přesnou ε - δ definici vlastní limity funkce v bodě. Následně tuto definici aplikujte a dokažte, že $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$. Jaký je v tomto konkrétním důkazu vztah mezi δ a ε ? Definujte také jednostranné limity – limitu zprava a limitu zleva.

- **Nevlastní limity a limity v nevlastních bodech**

- Definujte nevlastní limitu funkce v bodě (např. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$). Dále definujte vlastní limitu funkce v nevlastním bodě (např. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ pro $x \rightarrow \infty$).

- **Algebra limit pro funkce**

- Formulujte větu o algebře limit pro funkce (limita součtu, součinu, podílu).

- **Věta o sevření pro funkce**

- Uved'te znění Věty o sevření pro funkce. Aplikujte ji na výpočet limity $\lim_{(x \rightarrow 0)} x^2 \sin(1/x)$.

- **Techniky výpočtu limit**

- Vysvětlete postup výpočtu limity $\lim_{(h \rightarrow 0)} ((3+h)^2 - 9)/h$ pomocí algebraické úpravy výrazu před samotným dosazením.

Pojem limity nám nyní umožňuje definovat jednu z nejdůležitějších vlastností funkcí – spojitost.

2.2 Spojitost funkce a její vlastnosti

Spojitést je klíčovou vlastností funkcí, která formalizuje intuitivní představu "grafu bez skoků". Funkce je spojitá, pokud malé změny na vstupu vedou k malým změnám na výstupu. Tato vlastnost je zásadní pro většinu matematických modelů ve fyzice, inženýrství a ekonomii, protože zaručuje prediktabilitu a stabilitu systémů, které tyto funkce popisují.

- **Definice spojitosti**

- Definujte spojitost funkce v bodě pomocí limity. Dále definujte spojitost na intervalu a pojmy spojitosti zprava a zleva.

- **Typy nespojitosti**

- Uvažujte funkci $f(x) = (x^2 - x - 2)/(x - 2)$. V bodě $x=2$ má tato funkce nespojitost. Jak byste funkci v tomto bodě dodefinovali, aby se stala spojitou? Jak se tento typ nespojitosti nazývá a proč? Nyní porovnejte se situací funkce $g(x) = 1/x^2$ v bodě $x=0$. Proč zde podobný postup není možný?

- **Vlastnosti spojitých funkcí**

- Formulujte větu o algebře spojitých funkcí (spojitost součtu, součinu, podílu) a větu o spojitosti složené funkce.

- **Bolzanova věta o mezihodnotě**

- Uved'te znění Bolzanovy věty. Aplikujte ji na důkaz existence alespoň jednoho reálného kořene rovnice $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ v intervalu $(1, 2)$.

- **Weierstrassova věta o extrémech**

- Uved'te přesné znění Weierstrassovy věty o nabývání extrémů spojitě funkce na uzavřeném a omezeném intervalu. Načrtněte hlavní myšlenku jejího důkazu. Jakou klíčovou větu o *posloupnostech* tento důkaz využívá a proč je to elegantní příklad propojení diskrétní a spojitě analýzy? Dále vysvětlete, proč jsou předpoklady spojitosti funkce a uzavřenosti a omezenosti intervalu nezbytné. Pro každý z těchto tří předpokladů uveďte protipříklad funkce, která daný předpoklad nesplňuje a v důsledku toho nenabývá svých globálních extrémů.

Spojitost zaručuje "hladké" chování funkce, ale neříká nám nic o tom, *jak rychle* se funkce mění. Pro hlubší analýzu dynamiky funkcí, jako je jejich růst, klesání či zakřivení, potřebujeme zavést nový, silnější nástroj – derivaci.

3.0 Diferenciální počet: Derivace a techniky derivování

3.1 Definice a význam derivace

Derivace je fundamentálním konceptem diferenciálního počtu, který precizně kvantifikuje okamžitou rychlost změny. Tento jediný pojem má dvojí, avšak úzce propojenou, interpretaci. Geometricky představuje derivace směrnici tečny ke grafu funkce, čímž popisuje lokální "sklon" křivky. Fyzikálně pak derivace polohy podle času představuje okamžitou rychlost, což je koncept zásadní pro popis pohybu a dynamických systémů.

- **Geometrická interpretace: Tečna**

- Definujte směrnici sečny procházející dvěma body grafu funkce. Následně definujte tečnu ke grafu v daném bodě jako limitní polohu těchto sečen. Jak je pomocí limity definována směrnice tečny?

- **Fyzikální interpretace: Okamžitá rychlost**

- Definujte průměrnou rychlost objektu na daném časovém intervalu. Jak je z průměrné rychlosti odvozena okamžitá rychlost v konkrétním časovém okamžiku pomocí limitního přechodu?

- **Formální definice derivace**

- Uved'te přesnou definici derivace funkce f v bodě a pomocí limity s přírůstkem h jdoucím k nule. Co přesně znamená, když řekneme, že funkce je v daném bodě diferencovatelná?

- **Vztah mezi derivací a spojitostí**

- Zformulujte větu popisující vztah mezi diferencovatelností a spojitostí funkce v bodě. Uved'te příklad funkce ($f(x) = |x|$ v bodě $x=0$), která je v daném bodě spojitá, ale není v něm diferencovatelná, čímž prokážete, že opačné tvrzení k větě neplatí.

- **Derivace vyšších řádů**

- Definujte druhou derivaci funkce. Jak byste rekurzivně definovali n -tou derivaci funkce?

Výpočet derivací přímo z definice je často zdlouhavý a nepraktický. Proto byla odvozena sada obecných pravidel a vzorců, které umožňují derivovat i velmi složité funkce systematickým a efektivním způsobem.

3.2 Pravidla pro derivování a derivace elementárních funkcí

Zvládnutí základních pravidel pro derivování a znalost derivací elementárních funkcí je klíčovou praktickou dovedností pro práci s diferenciálním počtem. Tato pravidla nám umožňují rozložit složitý problém derivování na sérii jednodušších, mechanických kroků, což dramaticky zrychluje a zjednodušuje výpočty.

- **Základní pravidla derivování**

- Uved'te a dokažte pravidla pro derivaci součtu dvou funkcí, násobku funkce konstantou a součinu dvou funkcí.

- **Derivace podílu**

- Zformulujte vzorec pro výpočet derivace podílu dvou funkcí $(f/g)'$.

- **Derivace elementárních funkcí**

- Odvod'te z definice derivace (nebo z již odvozených pravidel) derivace následujících funkcí: x^n (pro $n \in \mathbb{N}$), e^x , $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Pro důkaz derivace $\sin(x)$ odvod'te z definice. Které dvě klíčové limity musíte v průběhu důkazu použít a jak se k nim dospěje? (Nápověda: geometrický argument s jednotkovou kružnicí).

- **Řetězové pravidlo (Derivace složené funkce)**

- Uved'te znění věty o derivaci složené funkce: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Aplikujte toto pravidlo na výpočet derivace funkce $h(x) = \sin(x^2)$.

- **Implicitní derivování**

- Vysvětlete techniku implicitního derivování. Použijte ji k nalezení dy/dx pro křivku definovanou rovnicí $x^2 + y^2 = 25$.

- **Derivace inverzních funkcí**

- Pomocí techniky implicitního derivování odvod'te vzorce pro derivaci přirozeného logaritmu $\ln(x)$ a funkce arkus tangens $\arctan(x)$.

Poté, co jsme si osvojili techniky výpočtu derivací, je dalším logickým krokem prozkoumat, jak můžeme tyto nástroje využít k detailní analýze vlastností funkcí a k řešení optimalizačních a jiných praktických problémů.

4.0 Aplikace derivací a klíčové věty diferenciálního počtu

4.1 Věty o střední hodnotě a L'Hospitalovo pravidlo

Věty o střední hodnotě představují teoretický most mezi lokálními vlastnostmi funkce (danými derivací v jednom bodě) a jejími globálními vlastnostmi (změnou funkčních hodnot na celém intervalu). Jsou to klíčové existenční věty s hlubokými důsledky pro celou analýzu. L'Hospitalovo pravidlo je pak mimořádně silným a praktickým nástrojem, který využívá derivací k elegantnímu řešení limit tzv. neurčitých výrazů, jejichž výpočet by byl jinak velmi obtížný.

- **Rolleova věta**

- Uved'te znění a geometrickou interpretaci Rolleovy věty. Načrtněte hlavní kroky jejího důkazu. Které dvě dříve probrané existenční věty (jedna o spojitých funkcích, druhá o lokálních extrémech) tvoří pilíře tohoto důkazu?

- **Lagrangeova věta o střední hodnotě**

- Uved'te znění a geometrickou interpretaci Lagrangeovy věty. Dokažte ji pomocí Rolleovy věty za použití pomocné funkce $h(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \cdot [f(b) - f(a)] / [b - a]$, jak je uvedeno ve skriptech. Uved'te klíčový důsledek této věty: funkce, jejíž derivace je na celém intervalu nulová, musí být na tomto intervalu konstantní.

- **L'Hospitalovo pravidlo**

- Zformulujte znění L'Hospitalova pravidla pro výpočet limit neurčitých výrazů typu $0/0$ a ∞/∞ .

- **Řešení neurčitých výrazů**

- Vysvětlete, jak se neurčité výrazy typu 0^0 , ∞^0 a 1^∞ převádí na tvar $0/0$ nebo ∞/∞ pomocí logaritmu. Demonstrujte tento postup na výpočtu limity $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)$.

Tyto teoretické věty a výpočetní techniky nám nyní umožňují přistoupit k systematickému využití derivací pro kompletní analýzu průběhu funkce.

4.2 Analýza průběhu funkce a extrémy

Derivace prvního a druhého řádu poskytují komplexní soubor informací o chování funkce. Znaménko první derivace odhaluje intervaly, na kterých funkce roste či klesá, a pomáhá identifikovat lokální extrémy. Znaménko druhé derivace pak popisuje "zakřivení" grafu – jeho konvexitu a konkávnost – a odhaluje inflexní body. Spojením těchto informací můžeme detailně analyzovat a přesně načrtnout graf i velmi složitých funkcí.

- **Monotónnost a první derivace**

- Zformulujte a dokažte test monotónnosti, tj. větu, která dává do souvislosti znaménko první derivace (f') s tím, zda je funkce na daném intervalu rostoucí, nebo klesající.

- **Lokální extrémy**

- Definujte stacionární (kritický) bod funkce. Uveďte znění Fermatovy věty o nutné podmínce pro existenci lokálního extrému. Formulujte test pro nalezení lokálních extrémů pomocí první derivace (sledování změny znaménka f').

- **Konvexita, konkávnost a druhá derivace**

- Definujte, kdy je funkce konvexní, kdy je konkávní a co je to inflexní bod. Zformulujte test konvexity/konkávnosti, který využívá znaménko druhé derivace (f'').

- **Test pomocí druhé derivace**

- Uveďte znění věty o testu existence lokálních extrémů ve stacionárních bodech pomocí druhé derivace.

- **Globální (absolutní) extrémy**

- Definujte globální maximum a minimum funkce. Popište kompletní algoritmus pro nalezení absolutních extrémů spojitě funkce na uzavřeném intervalu $[a, b]$.

- **Diferenciál a asymptoty**

- Definujte diferenciál dy funkce f v bodě x . Jaký je přesný vztah mezi diferenciálem dy a skutečným přírůstkem funkce $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$? Vysvětlete geometrický význam obou veličin na náčrtku a objasněte, proč je diferenciál klíčový pro lineární aproximaci funkce. Dále definujte asymptotu se směrnici a popište postup pro její nalezení pomocí výpočtu příslušných limit.

Všechny probrané koncepty – od axiomatických základů reálných čísel, přes precizní definici limity a spojitosti až po mocný aparát diferenciálního počtu a jeho aplikací – tvoří jeden propojený a logicky soudržný celek, který je nepostradatelným základem pro veškeré další studium vyšší matematiky a jejích aplikací v přírodních i společenských vědách.