

## Cvičení 1

Najděte derivaci funkce  $f$ , jestliže:

1.  $f(x) = x^6$
2.  $f(x) = x^{1000}$
3.  $f(t) = t^4$

## Cvičení 2

Vypočítejte derivaci funkce  $f$ , jestliže:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

## Řešení

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

## Cvičení 3

- (a)  $\frac{d}{dx}(3x^4) = ?$
- (b)  $\frac{d}{dx}(-x) = ?$

## Cvičení 4

Nechť  $f(x) = e^x - x$ . Vypočítejte  $f'(x)$  a  $f''(x)$ .

## Cvičení 5

V jakém bodě křivky  $y = e^x$  je tečna rovnoběžná s přímkou  $y = 2x$ ?

## Řešení

Určeme bod  $T(a, e^a)$  na křivce  $y = e^x$ , kde je tečna rovnoběžná s přímkou  $y = 2x$ .

Víme, že směrnice tečny v bodě  $T(a, e^a)$  je rovna  $f'(a)$ , kde  $f(x) = e^x$ . Tedy musí platit

$$f'(a) = 2.$$

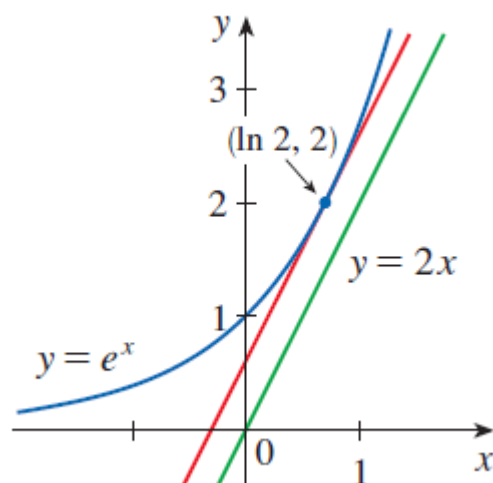
Tj.

$$\frac{d}{dx}(e^x)\Big|_{x=a} = 2.$$

Řešením rovnice

$$e^a = 2$$

je  $a = \ln 2$ . Tedy bod  $T$  má souřadnice  $(\ln 2, 2)$ .



## Cvičení 6

Mějme danou funkci  $f$  danou předpisem  $f(x) = xe^x$ .

(a) Najděte  $f'(x)$ .

(b) Najděte  $n$ -tou derivaci  $f^{(n)}(x)$ .

## Řešení

(a)  $f'(x) = e^x + xe^x$

(b)  $f^{(n)}(x) = (n + x)e^x$  (Dokažte matematickou indukcí!)

## Cvičení 7

Najděte rovnici tečny ke křivce  $y = \frac{e^x}{1+x^2}$  v bodě  $T(1, \frac{e}{2})$ .

## Řešení

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{(1+x^2)\frac{d}{dx}(e^x) - e^x\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\
 &= \frac{(1+x^2)e^x - 2xe^x}{(1+x^2)^2} \\
 &= \frac{e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2} \\
 &= \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}.
 \end{aligned}$$

Odtud plyne, že směrnice tečny je rovna

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 0.$$

Tečna v bodě  $T$  má tedy rovnici

$$y = \frac{e}{2}.$$

## Cvčení 8

Najděte 27. derivaci funkce  $f(x) = \cos(x)$ .

## Řešení

Spočítejme několik prvních derivací funkce  $f$ :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -\sin(x) \\
 f''(x) &= -\cos(x) \\
 f'''(x) &= \sin(x) \\
 f^{(4)}(x) &= \cos(x) \\
 f^{(5)}(x) &= -\sin(x).
 \end{aligned}$$

Odtud můžeme vidět, že  $f^{(n)}(x) = \cos x$  právě tehdy, když  $n$  je dělitelné číslem 4. Tedy

$$f^{(24)}(x) = \cos(x).$$

Pokud spočítáme další 3 derivace, dostaneme

$$\begin{aligned}
 f^{(25)}(x) &= -\sin(x) \\
 f^{(26)}(x) &= -\cos(x) \\
 f^{(27)}(x) &= \sin(x).
 \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že  $f^{(27)}(x) = \sin(x)$ .  $\square$

## Cvičení 9

Pomocí vzorce pro derivaci složené funkce najděte derivaci funkce  $f(x) = (x^3 + 1)^{100}$ .

## Řešení

$$\begin{aligned} f'(x) &= 100(x^3 + 1)^{99} \frac{d}{dx}(x^3 + 1) \\ &= 100(x^3 + 1)^{99} (3x^2) \\ &= 300x^2(x^3 + 1)^{99}. \end{aligned}$$

□

## Cvičení 10

Najděte derivaci funkce  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$ .

## Řešení

Nejdříve přepíšme  $f(x)$  do tvaru

$$f(x) = (x^2 + x + 1)^{-\frac{1}{3}}.$$

Potom

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-\frac{4}{3}} \frac{d}{dx}(x^2 + x + 1) \\ &= -\frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-\frac{4}{3}}(2x + 1) \\ &= -\frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)^{\frac{4}{3}}}. \end{aligned}$$

□

## Cvičení 11

Vypočtěte derivaci funkce

$$g(t) = \left( \frac{t-2}{2t+1} \right)^9.$$

**Řešení** S využitím vzorce pro derivaci složené funkce dostaneme

$$\begin{aligned}
 g'(t) &= 9 \left( \frac{t-2}{2t+1} \right)^8 \frac{d}{dt} \left( \frac{t-2}{2t+1} \right) \\
 &= 9 \left( \frac{t-2}{2t+1} \right)^8 \frac{(2t+1) \cdot 1 - 2(t-2)}{(2t+1)^2} \\
 &= \frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}.
 \end{aligned}$$

□

## Cvičení 12

Zderivujte funkci  $y = e^{\sin x}$ .

**Řešení** Použijeme vzorec pro derivaci složené funkce:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\sin x}) = e^{\sin x} \frac{d}{dx}(\sin x) = e^{\sin x} \cos x.$$

□

## Cvičení 13

Odvoďte vzorec pro derivaci obecné exponentiální funkce  $f(x) = a^x$ , kde  $a > 0$ .

## Řešení

Přepíšme předpis funkce  $f$  do tvaru

$$f(x) = e^{x \ln a}.$$

Potom aplikujeme vzorec pro derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \ln a}) \\
 &= e^{x \ln a} \frac{d}{dx}(x \ln a) \\
 &= e^{x \ln a} \ln a \\
 &= a^x \ln a.
 \end{aligned}$$

Tj.

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a.$$

□