

Derivace polynomických funkcí a exponenciálních funkcí

Věta (derivace konstantní funkce) Necht' c je konstanta. Potom derivace funkce $f(x) = c$ je $f'(x) = 0$.

Důkaz: Necht' c je konstanta. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = c$. Z definice derivace máme

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

□

Věta (derivace mocniny s přirozeným exponentem) Necht' $n \in \mathbb{N}$ a $f(x) = x^n$. Potom derivace funkce f je

$$\boxed{f'(x) = nx^{n-1}}.$$

Důkaz. Z definice derivace máme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right] \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Věta (derivace mocniny s obecným reálným exponentem) Necht' $n \in \mathbb{R}$ a $f(x) = x^n$. Potom derivace funkce f je

$$\boxed{f'(x) = nx^{n-1}}.$$

Tj.

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}}.$$

Příklad. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Řešení. Funkci f můžeme zapsat ve tvaru $f(x) = x^{2/3}$. Potom z předchozí věty máme

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x^2}) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Věta (derivace násobku funkce) Necht' c je konstanta a f je diferencovatelná funkce. Potom derivace funkce $g(x) = cf(x)$ je

$$\boxed{g'(x) = cf'(x)}.$$

Tj.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(cf(x)) = c \frac{d}{dx}f(x)}.$$

Důkaz. Položme $g(x) = cf(x)$. Potom z definice derivace máme

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c[f(x+h) - f(x)]}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= cf'(x). \end{aligned}$$

□

Věta (derivace součtu a rozdílu funkcí) Necht' f a g jsou diferencovatelné funkce. Potom derivace funkce $F(x) = f(x) \pm g(x)$ je

$$\boxed{F'(x) = f'(x) \pm g'(x)}.$$

Tj.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)}.$$

Důkaz. Dokažme vzorec pro součet funkcí. Rozdíl funkcí se dokáže analogicky. Položme $F(x) = f(x) + g(x)$. Potom z definice derivace máme:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

□

Domácí cvičení. Matematickou indukcí dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$ a pro n diferencovatelných funkcí $f_1, f_2, \dots, f_n$ platí

$$\frac{d}{dx}(f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) = \frac{d}{dx}f_1(x) + \frac{d}{dx}f_2(x) + \dots + \frac{d}{dx}f_n(x).$$

Příklad. Určeme derivaci $\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5)$.

Řešení. Podle předchozí věty máme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5) &= \frac{d}{dx}x^8 + \frac{d}{dx}12x^5 - \frac{d}{dx}4x^4 + \frac{d}{dx}10x^3 - \frac{d}{dx}6x + \frac{d}{dx}5 \\ &= \frac{d}{dx}x^8 + 12\frac{d}{dx}x^5 - 4\frac{d}{dx}x^4 + 10\frac{d}{dx}x^3 - 6\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}5 \\ &= 8x^7 + 12 \cdot 5x^4 - 4 \cdot 4x^3 + 10 \cdot 3x^2 - 6 + 0 \\ &= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6. \end{aligned}$$

□

Nyní předpokládejme, že jsme dokázali existenci limity

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Věta (derivace exponenciální funkce) Necht' $f(x) = e^x$. Potom derivace funkce f je

$$f'(x) = e^x.$$

Tj.

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x.$$

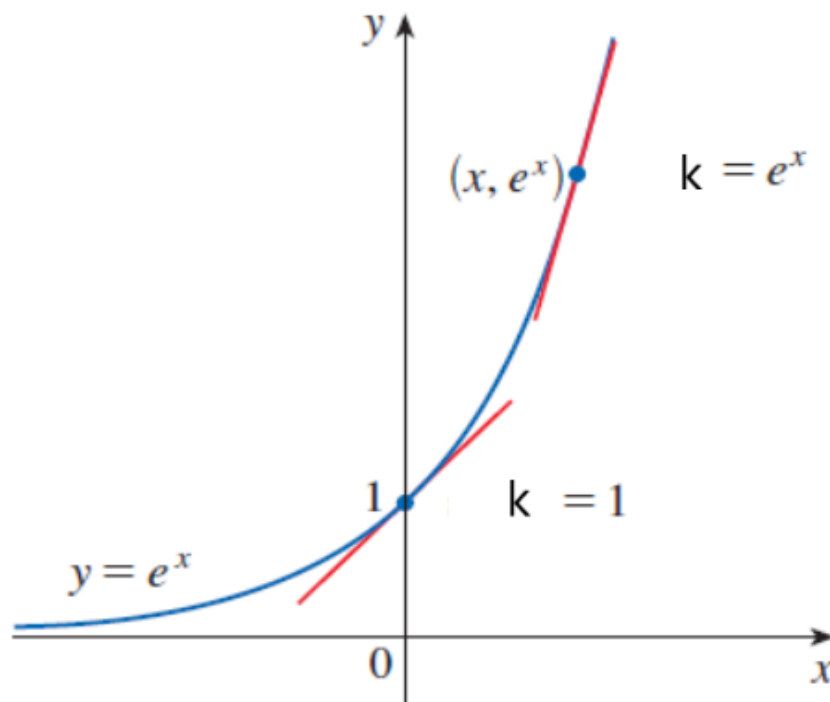
Důkaz. Z definice derivace máme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} \\ &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x. \end{aligned}$$

□

Tedy

$$\left. \frac{d}{dx}e^x \right|_{x=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$



Derivace součinu a podílu funkcí

Věta (derivace součinu funkcí) Necht' f a g jsou funkce, které jsou derivovatelné. Pak platí:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Tj.

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \frac{d}{dx}[g(x)] + g(x) \frac{d}{dx}[f(x)]}$$

Poznámka. Připomeňme, že použitím Leibnizovské notace pro derivaci dostáváme

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Zde $y = f(x)$.

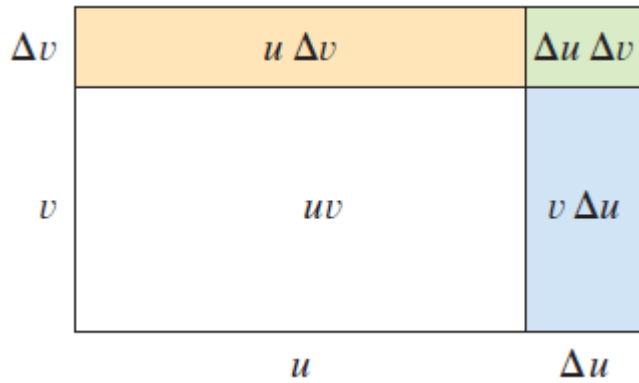
Důkaz. Položme $u = f(x)$ a $v = g(x)$. Potom

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \quad \text{a} \quad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x).$$

Dále platí:

$$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v.$$

Viz obrázek:



Odtud vydělením Δx dostáváme

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Pokud přejdeme k limitě pro $\Delta x \rightarrow 0$, dostaneme

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0.$$

Dále

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(u)}{\Delta x} &= \frac{du}{dx}, \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(v)}{\Delta x} &= \frac{dv}{dx}. \end{aligned}$$

Odtud plyne existence limity

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \\ &= u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} \\ &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + 0 \\ &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}. \end{aligned}$$

□

V Newtonovské notaci pro derivaci dostáváme

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Věta (derivace podílu). Necht' jsou funkce f a g diferencovatelné, potom

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Tj. v Leibnizově notaci

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) \frac{d}{dx} [f(x)] - f(x) \frac{d}{dx} [g(x)]}{[g(x)]^2}.$$

V předchozím vzorci je nutné předpokládat, že $g(x) \neq 0$.

Příklad. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^3+6}$.

Řešení. Funkce f je podílem dvou funkcí, tudíž užitím vzorce pro derivaci podílu dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^3+6) \cdot \frac{d}{dx}(x^2+x-2) - (x^2+x-2) \cdot \frac{d}{dx}(x^3+6)}{(x^3+6)^2} \\ &= \frac{(x^3+6) \cdot (2x+1) - (x^2+x-2) \cdot (3x^2)}{(x^3+6)^2} \\ &= \frac{(2x^4+x^3+12x+6) - (3x^4+3x^3-6x^2)}{(x^3+6)^2} \\ &= \frac{-x^4-2x^3+6x^2+12x+6}{(x^3+6)^2}. \end{aligned}$$

□

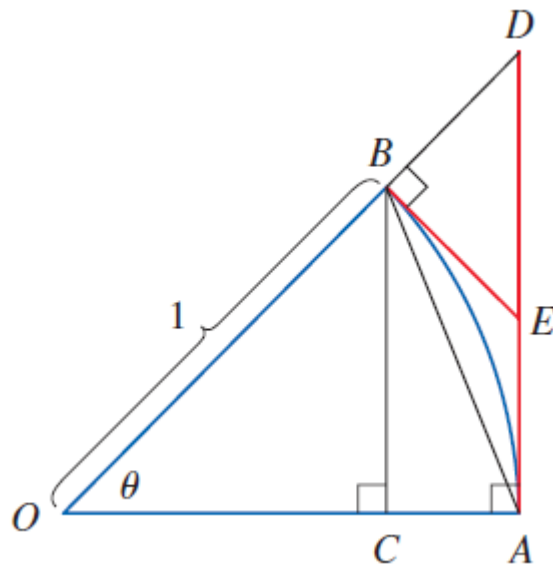
Derivace trigonometrických funkcí

Dvě důležité trigonometrické limity

Věta.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

Důkaz. Nechť $\theta \neq 0$. Potom uvažujme jednotkovou kružnici a oblouk AB vymezený středovým úhlem velikosti θ radiánů. Potom je délka oblouku AB $\text{arc } AB = \theta$.



Dále je z obrázku vidět, že

$$|BC| < |AB| < \text{arc } AB,$$

tudíž

$$\sin \theta < \theta \quad \text{tedy} \quad \frac{\sin \theta}{\theta} < 1.$$

Zde předpokládáme, že $0 < \theta < \pi/2$. Dále platí, že

$$\text{arc } AB < |AE| + |EB|.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \theta = \text{arc } AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA| \tan \theta = \tan \theta. \end{aligned}$$

Tedy

$$\theta < \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

a tedy

$$\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1.$$

Protože víme, že $\lim_{\theta \rightarrow 0} 1 = 1$ a $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$, tak podle věty o sevření platí, že

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

Protože je funkce $\frac{\sin \theta}{\theta}$ sudá, tak

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

Dokázali jsme tedy, že

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

□

Věta.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\cos \theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta + 1} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \theta - 1}{\theta(\cos \theta + 1)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 \theta}{\theta(\cos \theta + 1)} \\ &= -\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \right) \\ &= -\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \\ &= -1 \cdot \left(\frac{\sin 0}{\cos 0 + 1} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Uvažujme funkci $f(x) = \sin x$, potom máme:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= (\sin x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

Věta.

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x.$$

Obdobně se dokáže následující věta.

Věta.

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x.$$

Příklad. Dokažme užitím dosud zmíněných vět, že

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan x &= \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} && \text{použijeme vzorec pro derivaci podílu} \\ &= \frac{\cos x \cdot \frac{d}{dx} \sin x - \sin x \cdot \frac{d}{dx} \cos x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

□

Konec 30.11.

Derivace složené funkce

Věta (derivace složené funkce). Necht' je funkce f diferencovatelná v bodě x a funkce g diferencovatelná v bodě $f(x)$. Potom je složená funkce $g \circ f$ diferencovatelná v bodě x a platí

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

tj. derivace složené funkce je rovna součinu derivace vnější funkce a derivace vnitřní funkce.

Pokud položíme $y = f(x)$ a $z = g(y)$, tak

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Příklad. Spočítejme derivaci funkce $h(x) = \sin(x^2)$.

Řešení. Vnitřní funkce $y = f(x) = x^2$ a vnější funkcí je funkce $g(y) = \sin y$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx} \sin(x^2) \\ &= \cos(x^2) \cdot \frac{d}{dx} x^2 \\ &= \cos(x^2) \cdot 2x \\ &= 2x \cos(x^2). \end{aligned}$$

□

Příklad. Spočítejme derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 1) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

□

Technika implicitního derivování

Příklad. Spočítejme derivaci $\frac{dy}{dx}$, pokud $x^2 + y^2 = 25$. Potom najděme rovnici tečny ke křivce o rovnici $x^2 + y^2 = 25$ v bodě $T(3, 4)$.

Řešení. Derivujme obě strany rovnice $x^2 + y^2 = 25$ podle x .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^2 + y^2) &= \frac{d}{dx} 25 \\ \frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} y^2 &= 0 \\ 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Při výpočtu derivace $\frac{d}{dx} y^2$ jsme použili větu o derivaci složené funkce. Tedy

$$\frac{d}{dx} (y^2) = \frac{d}{dy} (y^2) \cdot \frac{dy}{dx} = 2y \cdot \frac{dy}{dx}.$$

V bodě $T(3, 4)$ máme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}.$$

Rovnice tečny v bodě $T(3, 4)$ má tedy tvar

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3).$$

Tj.

$$3x + 4y = 25.$$

□

Řešení č. 2. Nejdříve vyjádříme y jako funkci x .

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ y^2 &= 25 - x^2 \\ y &= \pm \sqrt{25 - x^2}. \end{aligned}$$

Protože bod $T(3, 4)$ leží v horní polorovině, tak

$$y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}.$$

Nyní

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{25 - x^2}) = \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2}} \cdot \frac{d}{dx}(25 - x^2) = \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}.$$

V bodě $T(3, 4)$ máme

$$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 9}} = -\frac{3}{4}.$$

Rovnici tečny najdeme jako v předchozím řešení. □

Poznámka. V předchozím příkladě vzorec $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ určí derivaci v závislosti na x a y .

Vzorec platí nezávisle na tom, je-li y vyjádřeno jako funkce $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ nebo $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$.

Platí totiž pro případ kdy $y = \sqrt{25 - x^2}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}.$$

Pro případ, kdy je $y = -\sqrt{25 - x^2}$, máme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{-\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}.$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(-\sqrt{25-x^2}) = -\frac{d}{dx}(\sqrt{25-x^2}) \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{25-x^2}} \cdot \frac{d}{dx}(25-x^2) = -\frac{1}{2\sqrt{25-x^2}} \cdot (-2x) \\
 &= \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}.
 \end{aligned}$$

Derivace logaritmické funkce a cyklometrické funkce

Věta. Pro $x > 0$ a $a > 0, a \neq 1$ platí

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}.$$

Důkaz. Necht' $y = \log_a x$. Potom

$$a^y = x.$$

Derivací obou stran podle x dostaneme

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(a^y) &= \frac{d}{dx}x \\
 (a^y \ln a) \cdot \frac{dy}{dx} &= 1 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.
 \end{aligned}$$

□

Speciálně odtud plyne, že

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

Příklad. Spočítejme derivaci funkce $f(x) = \ln(x^3 + 1)$.

Řešení.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{d}{dx} \ln(x^3 + 1) \\
 &= \frac{1}{x^3 + 1} \cdot \frac{d}{dx}(x^3 + 1) \\
 &= \frac{1}{x^3 + 1} \cdot 3x^2 \\
 &= \frac{3x^2}{x^3 + 1}.
 \end{aligned}$$

Příklad. Spočítejme derivaci funkce $f(x) = \ln(\sin x)$.

Řešení.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{d}{dx} \ln(\sin x) \\
 &= \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{d}{dx} \sin x \\
 &= \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \\
 &= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.
 \end{aligned}$$

Poznámka. Předchozí výpočet je možný takto zobecnit:

$$\boxed{\frac{d}{dx} [\ln(f(x))] = \frac{f'(x)}{f(x)}}.$$

Věta (derivace cyklometrických funkcí).

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(\arcsin x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 \frac{d}{dx}(\arccos x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 \frac{d}{dx}(\arctan x) &= \frac{1}{1+x^2}.
 \end{aligned}$$

Důkaz. Odvodíme technikou implicitního derivování např. třetí vzorec pro derivaci $\arctan x$. Položme $y = \arctan x$. Potom $\tan y = x$. Derivací obou stran podle x dostaneme

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(\tan y) &= \frac{d}{dx} x \\
 \frac{d}{dx}(\tan y) &= 1 \\
 \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} &= 1 \\
 \frac{dy}{dx} &= \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}.
 \end{aligned}$$

□