

Derivace 1. řádu

V definici derivace v bodě je derivace $f'(a)$ je dána jako hodnota limity

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

pokud tato limita existuje.

Nyní připustme, že se bude a chovat jako proměnná. Nahradíme-li pak proměnnou a proměnnou x , můžeme se dívat na derivaci jako na funkci $f'(x)$, která je dána předpisem

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1)$$

Symbol f' bude představovat funkci, která každému bodu x přiřadí hodnotu $f'(x)$. Tato funkce se nazývá **derivace funkce f** .

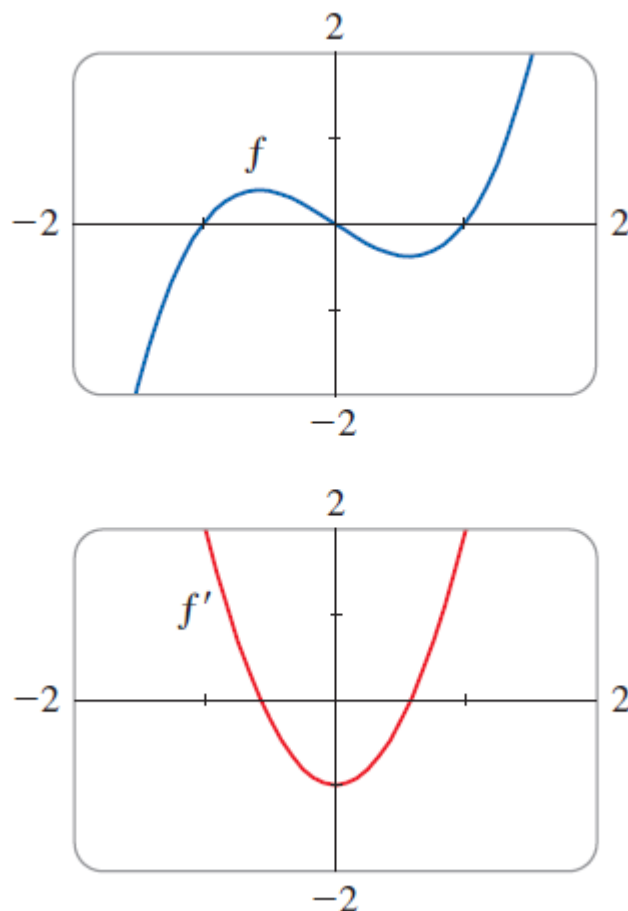
Označení: Pro označení derivace funkce f se používají následující zápisy:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} f = \frac{df(x)}{dx} = Df(x) = Df.$$

Příklad. Jestliže $f(x) = x^3 - x$, pak najdeme předpis derivace f' .

Řešení. Rovnice (1) dává

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - (x^3 - x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1. \end{aligned}$$



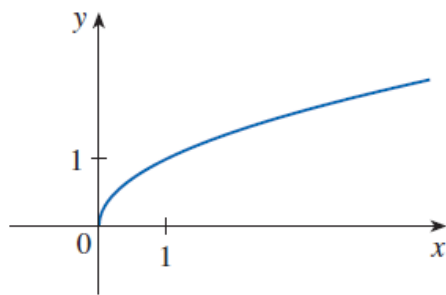
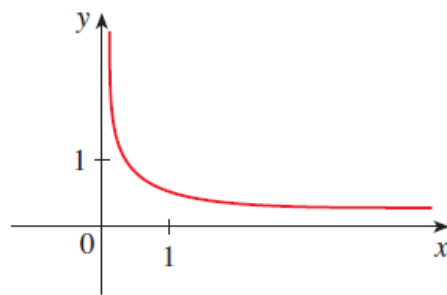
Příklad. Mějme danu funkci f předpisem $f(x) = \sqrt{x}$. Najděte předpis derivace f' .

Řešení. Derivace funkce f v bodě x je definována jako

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Derivace $f'(x)$ existuje pro každé $x > 0$. Tedy definiční obor derivace f' je interval $(0, \infty)$. $\square$

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Definice. Řekneme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a , pokud existuje

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Dále řekneme, že funkce f je diferencovatelná na intervalu (a, b) (nebo na intervalu (a, ∞) , $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$), pokud je diferencovatelná v každém bodě tohoto intervalu.

Příklad. Uvažujme funkci $f(x) = |x|$. Pro která $x \in \mathbb{R}$ je funkce f diferencovatelná?

Řešení. Je-li $x > 0$, pak $f(x) = x$ a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \end{aligned}$$

Uvědomme si, že pro $x > 0$ je $|x| = x$ a pro $|h|$ dostatečně malé je $|x+h| = x+h$. Proto jsme výpočet zjednodušili.

Podobně pro $x < 0$ dostaneme je $|x| = -x$ a pro $|h|$ dostatečně malé je $|x+h| = -(x+h)$. Tudíž pro $x < 0$ výpočet probíhá takto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1. \end{aligned}$$

Pro výpočet derivace v bodě $x = 0$ musíme použít definici:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |0|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}. \end{aligned}$$

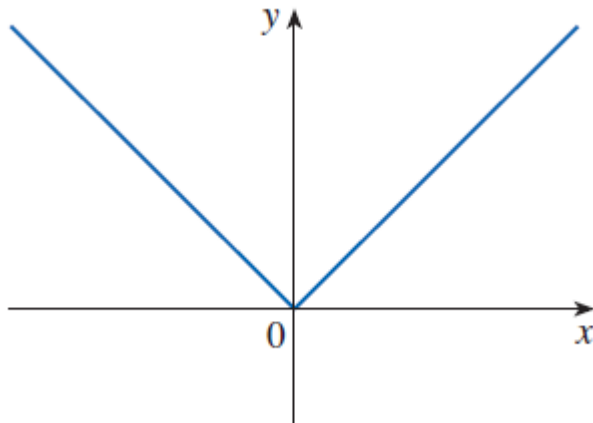
Nyní budeme nejdříve zkoumat jednostranné limity.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Protože se tyto jednostranné limity liší, plyne odsud, že derivace $f'(0)$ neexistuje. $\square$

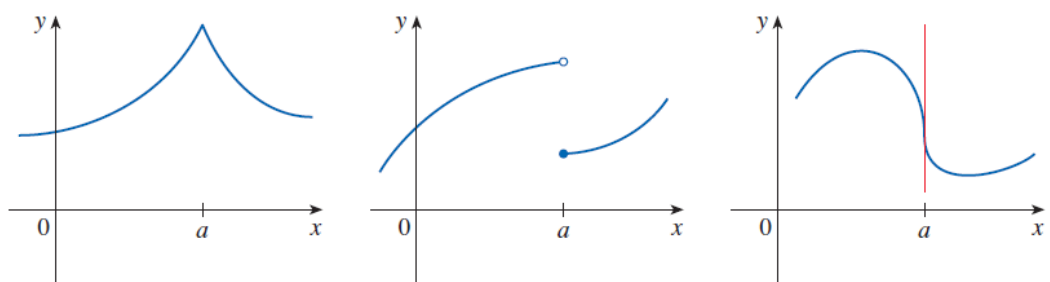
Poznámka. V předchozím příkladě jsme ukázali, že funkce $f(x) = |x|$ je diferencovatelná na intervalu $(-\infty, 0)$ a na intervalu $(0, \infty)$. V bodě $x = 0$ funkce není diferencovatelná. Funkce je přesto v tomto bodě spojitá.



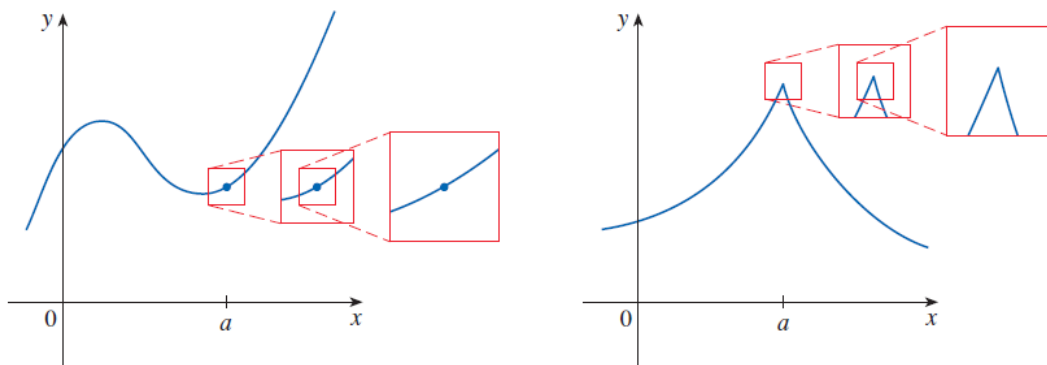
Věta. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě a , pak je v tomto bodě spojitá.

Poznámka. Předchozí větu nelze obrátit jak ukazuje předchozí příklad.

Na následujících obrázcích můžete vidět příklady grafů funkcí, které nejsou v bodě a diferencovatelné.



Následující obrázky ilustruje rozdíl mezi grafem diferencovatelné funkce v bodě $x = a$ a grafem funkce, která není diferencovatelná v bodě $x = a$.



Derivace vyšších řádů

Předpokládejme, že funkce f je diferencovatelná funkce na otevřeném intervalu I , pak derivace f' je též funkce na intervalu I . Pokud je f' diferencovatelná funkce na intervalu I , pak derivace f' se nazývá druhá derivace funkce f a značí se f'' . Obdobně se definují i vyšší derivace.

Obecně **derivace n -tého řádu** funkce f v bodě x_0 se značí $f^{(n)}(x_0)$ a je definována jako

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}.$$

Tedy

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Užijeme-li Leibnizova zápisu derivace, pak derivace n -tého řádu můžeme zapsat jako

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right).$$

Příklad. Je-li $f(x) = x^3 - x$, pak najděme druhou derivaci funkce f .

Řešení. Nejprve spočteme první derivaci funkce f :

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Druhou derivaci funkce f pak spočteme jako derivaci funkce f' :

$$f''(x) = (3x^2 - 1)' = 6x.$$

Druhá derivace f'' je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Příklad. Najděme derivace f''' a $f^{(4)}$ funkce $f(x) = x^3 - x$.

Řešení. První a druhou derivaci funkce f jsme spočetli v předchozím příkladu. Derivace f''' je pak derivace funkce f'' :

$$f'''(x) = (6x)' = 6.$$

Derivace $f^{(4)}$ je derivace funkce f''' :

$$f^{(4)}(x) = (6)' = 0.$$

Konec 23.11.