

Cvičení 1

Najděte rovnici tečny ke křivce s daným bodem dotyku.

(a) $y = 2x^2 - 5x + 1$, $T(3, 4)$

(b) $y = x^2 - 2x^3$, $T(1, -1)$.

Řešení. (a) Spočítejme $f'(3)$.

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(3+h)^2 - 5(3+h) + 1 - (2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(9 + 6h + h^2) - 15 - 5h + 1 - 18 + 15 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 7h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 7) = 7 \end{aligned}$$

Rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $T(3, 4)$ je

$$y - 4 = 7(x - 3).$$

Po úpravě dostaneme

$$y = 7x - 17.$$

Cvičení 2

Najděte $f'(a)$, kde f je dána předpisem.

(a) $f(x) = \frac{x^2}{x+6}$

(b) $f(t) = t^3 - 3t$.

Řešení. (a) Nejdříve si vyjádříme $f(a+h)$:

$$f(a+h) = \frac{(a+h)^2}{a+h+6} = \frac{a^2 + 2ah + h^2}{a+h+6}.$$

$$f(a) = \frac{a^2}{a+6}.$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{a^2 + 2ah + h^2}{a+h+6} - \frac{a^2}{a+6}}{h}$$

Tedy po úpravě

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{a^2+2ah+h^2}{a+h+6} - \frac{a^2}{a+6}}{h}$$

Nyní počítejme limitu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{a^2+2ah+h^2}{a+h+6} - \frac{a^2}{a+6}}{h}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{a^2+2ah+h^2}{a+h+6} - \frac{a^2}{a+6}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^2 + 2ah + h^2)(a+6) - a^2(a+h+6)}{h(a+h+6)(a+6)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2(a+6) + 2ah(a+6) + h^2(a+6) - a^2(a+h+6)}{h(a+h+6)(a+6)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah(a+6) + h^2(a+6) - a^2h}{h(a+h+6)(a+6)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2a(a+6) + h(a+6) - a^2}{(a+h+6)(a+6)} \\ &= \frac{2a(a+6) + 0(a+6) - a^2}{(a+0+6)(a+6)} \\ &= \frac{2a^2 + 12a - a^2}{(a+6)^2} \\ &= \frac{a^2 + 12a}{(a+6)^2} \\ &= \frac{a(a+12)}{(a+6)^2} \end{aligned}$$

Tedy

$$f'(a) = \frac{a(a+12)}{(a+6)^2}.$$

Konec 16.11.

(b) Nyní počítejme $f'(t)$ pro funkci $f(t) = t^3 - 3t$.

```
In [ ]: # Použijeme modul sympy pro symbolické derivování

from sympy import *
from IPython.display import display

# definujeme symboly
t = Symbol('t')

# definujeme funkci
f = t**3 - 3*t
```

```
# derivujeme
f.diff(t)

# zobrazíme výsledek pomocí IPython.display
display(f.diff(t))
```

$$3t^2 - 3$$

Vypočítejme derivaci funkce f v bodě t přímo z definice derivace:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^3 - 3(t+h) - (t^3 - 3t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3 - 3t - 3h - t^3 + 3t}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3t^2h + 3th^2 + h^3 - 3h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3t^2 + 3th + h^2 - 3) = 3t^2 - 3. \end{aligned}$$

□

Cvičení 3

Každá uvedená limita vyjadřuje hodnotu derivace jisté funkce f v nějakém bodě $x = a$.
Určete takovou funkci f a bod a .

(a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+h} - 3}{h}$

(b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-2+h} - e^{-2}}{h}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^6 - 64}{x - 2}$

(d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(\frac{\pi}{4} + h) - 1}{h}$

Cvičení 4

Určete $f'(0)$, kde funkce je dána předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$