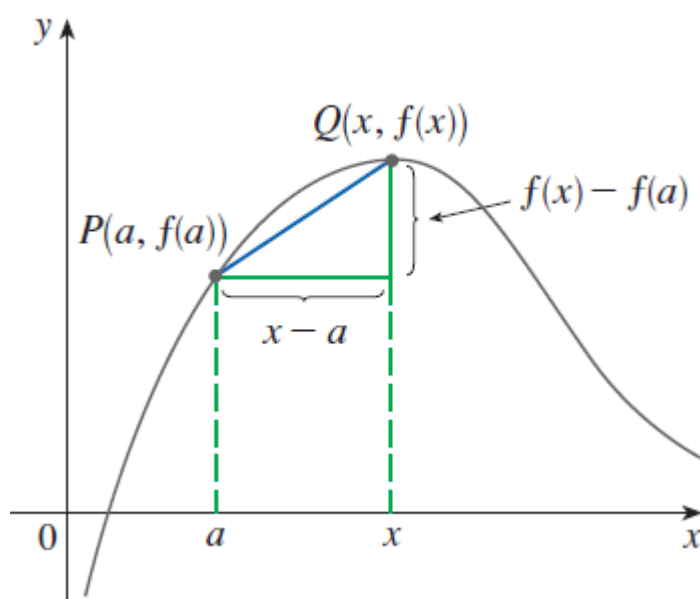


Předběžné úvahy

Tečna ke grafu funkce

Uvažujme funkci $y = f(x)$, a křivku C , která je jejím grafem. Zvolme bod $P(a, f(a))$ na křivce C . V okolí bodu P uvažujme bod $Q(x, f(x))$, kde $x \neq a$. Úsečka PQ se nazývá **sečnou (nebo sekantou)** křivky C . Vyjádřeme nyní směrnici:

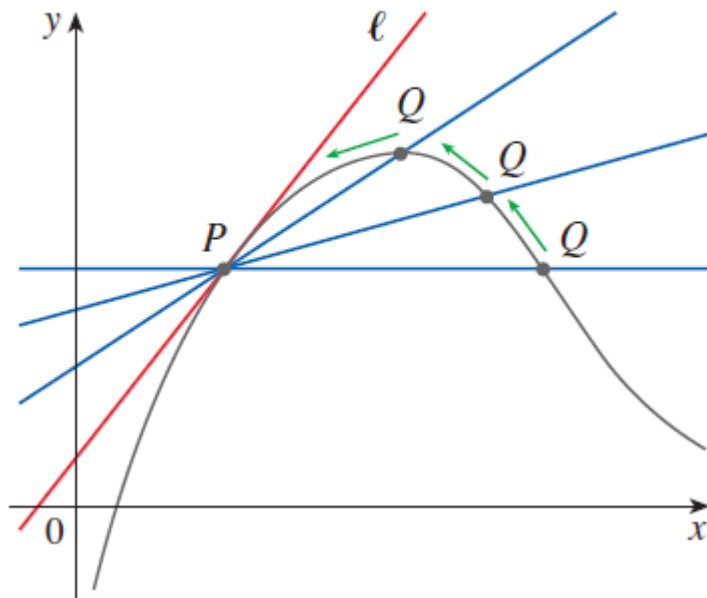
$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$



Definice tečny. **Tečnou** ke křivce $y = f(x)$ v bodě $P(a, f(a))$ je přímka procházející bodem P a mající směrnici

$$k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

pokud poslední limita existuje.

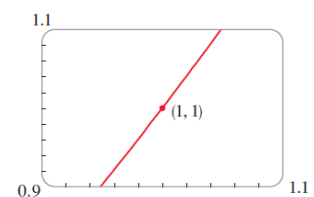
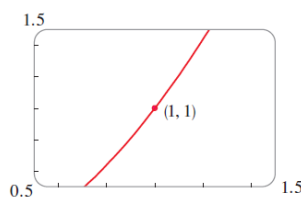
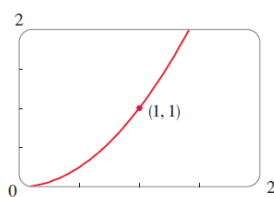


Příklad. Najděme rovnici tečny ke křivce o rovnici $y = x^2$ v bodě $P(1, 1)$.

Řešení. Nejprve si zkontrolujeme, že bod P leží na křivce. Dosazením dostaneme $1 = 1^2$, tedy bod P leží na křivce. Nyní si vyjádříme směrnici tečny.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2. \end{aligned}$$

Rovnice tečny má pak tvar $y - 1 = 2(x - 1)$, tedy $y = 2x - 1$. $\square$

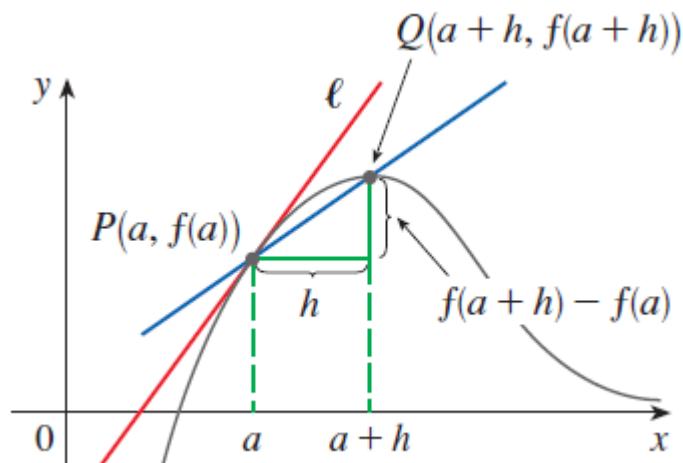


Směrnici tečny lze vyjádřit alternativně, pokud položíme $h = x - a$ a $x = a + h$, pak

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Nyní lze opět vyjádřit směrnici k limitním přechodem $h \rightarrow 0$:

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$



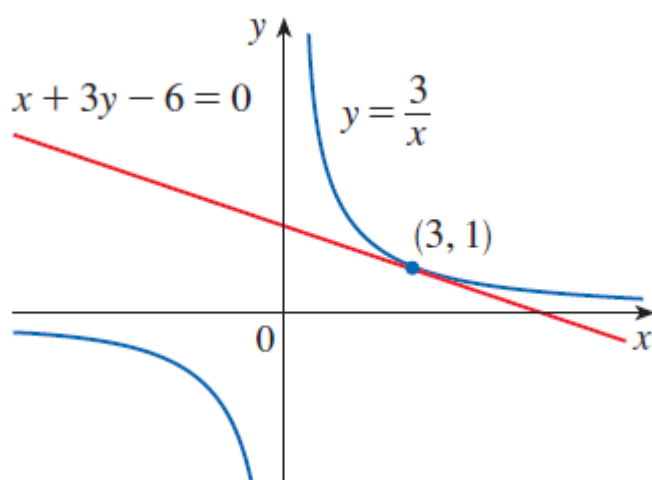
Příklad. Najděme rovnici tečny k hyperbole o rovnici $y = \frac{3}{x}$ v bodě $T(3, 1)$.

Řešení. Nejprve si zkontrolujeme, že bod T leží na hyperbole. Dosazením dostaneme $1 = \frac{3}{3}$, tedy bod T na hyperbole leží. Přejdeme k výpočtu směrnice tečny.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3-(3+h)}{3+h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{3+h} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

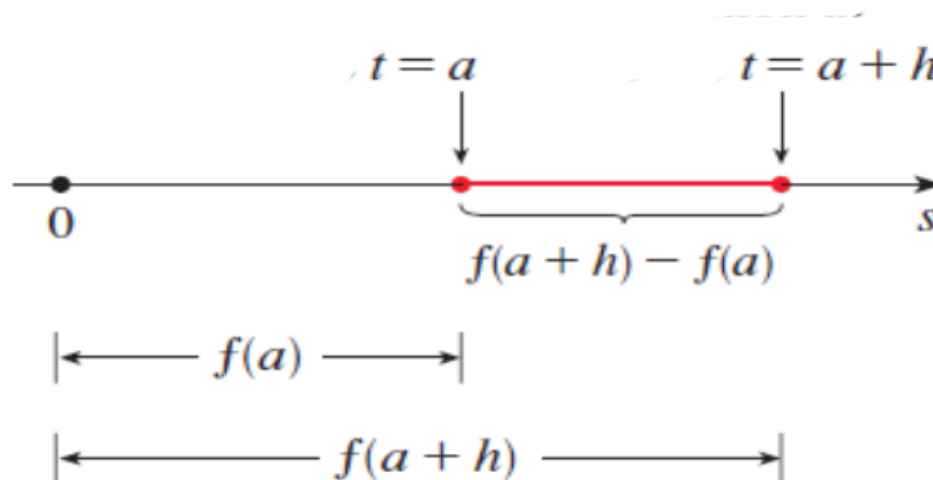
Tedy rovnice tečny s bodem dotyku T má tvar $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3)$. Po úpravě dostaneme směrnicový tvar rovnice tečny $y = -\frac{1}{3}x + 2$. Obecná rovnice tečny má tvar

$$x + 3y - 6 = 0.$$



Okamžitá rychlost

Uvažujme pohyb hmotného bodu po přímce. Funkce f popisuje pohyb hmotného bodu a funkční hodnota označuje polohu bodu v závislosti na čase t .



Uvažujme časový interval začínající v čase $t = a$ a končící v čase $t = a + h$. Potom lze vyjádřit **průměrnou rychlost** jako

$$\bar{v} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Definice okamžité rychlosti. Okamžitou rychlostí hmotného bodu v čase $t = a$ rozumíme limitu průměrné rychlosti v čase $t = a$ pro $h \rightarrow 0$:

$$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

pokud poslední limita existuje.

Příklad. Předpokládejme, že jsme z klidové polohy upustili těleso z výšky 450m. Zanedbáváme odpor vzduchu.

(a) Jaká je okamžitá rychlost tělesa v čase $t = 5s$?

(b) Jaká je okamžitá rychlost tělesa v čase dopadu?

Řešení. Pohyb tělesa během volného pádu lze popsat rovnicí

$$s = f(t) = \frac{1}{2}gt^2 = 4.9t^2,$$

kde s je výška tělesa nad zemí v metrech a t je čas v sekundách.

Potom platí:

$$\begin{aligned}
 v(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9(2ah + h^2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 4.9(2a + h) = 4.9 \cdot 2a = 9.8a.
 \end{aligned}$$

(a) Okamžitá rychlost tělesa v čase $t = 5s$ je $v(5) = 9.8 \cdot 5 = 49m/s$. (b) Protože těleso padá z výšky 450m, pak těleso dopadne na zem v čase t za podmínky, kdy $s(t) = 450$, tj. když

$$4.9t^2 = 450.$$

Odtud

$$t = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6s.$$

Okamžitá rychlost tělesa v čase dopadu je $v(9.6) = 9.8 \cdot 9.6 \approx 94m/s$.

Definice derivace

Definice. Necht' f je funkce definovaná na nějakém okolí bodu a . **Derivací funkce f v bodě a** rozumíme limitu

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pokud poslední limita existuje.

Pokud položíme v definici derivace $x = a + h$, pak dostaneme

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Příklad. Užitím definice derivace určíme derivaci funkce $f(x) = x^2 - 8x + 9$ v bodě

(a) $x = 2$,

(b) $x = a$.

Řešení. (a) Z definice derivace dostáváme

$$\begin{aligned}
 f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 8(2+h) + 9 - (2^2 - 8 \cdot 2 + 9)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 16 - 8h + 9 - 4 + 16 - 9}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-4)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (h-4) = -4.
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - (a^2 - 8a + 9)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2a + h - 8)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h - 8) = 2a - 8.
 \end{aligned}$$

□

Dále můžeme konstatovat, že hodnota derivace $f'(a)$ je **směrnice tečny** k grafu funkce f v bodě a .

Příklad. Určete směrnici tečny k grafu funkce f dané předpisem $f(x) = x^2 - 8x + 9$ v bodě $T(3, ?)$.

Řešení. Nejdříve určíme druhou souřadnici bodu T . Dosazením $x = 3$ dostáváme $f(3) = 3^2 - 8 \cdot 3 + 9 = -6$. V předchozím příkladu jsme určili, že $f'(a) = 2a - 8$. Dosazením $a = 3$ dostáváme $f'(3) = 2 \cdot 3 - 8 = -2$. Směrnice tečny k grafu funkce f v bodě T je -2 . Odtud plyne, že rovnice tečny k grafu funkce f v bodě T je

$$y - (-6) = -2(x - 3),$$

tj.

$$y + 6 = -2x + 6,$$

$$y = -2x.$$

