

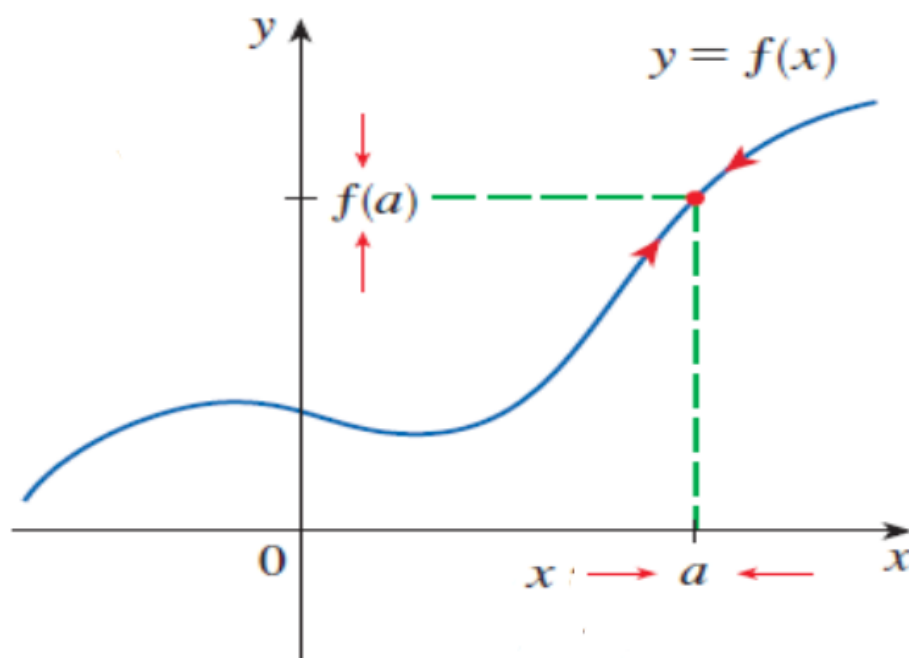
Spojitosť funkcí

Definice. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a , jestliže

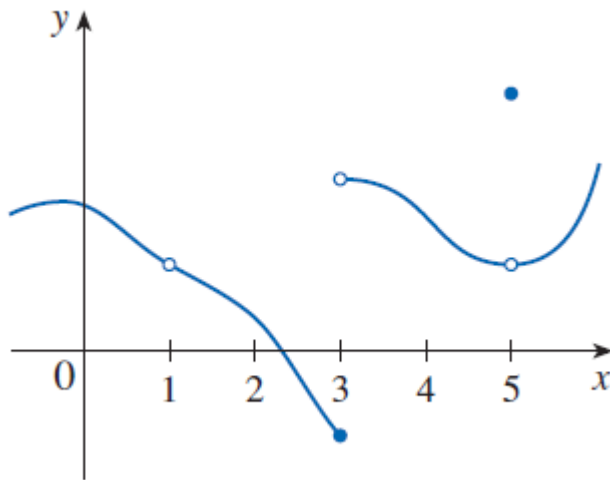
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Definice nepřímě požaduje, aby

1. $f(a)$ bylo definováno, tj. $a \in D_f$.
2. Aby limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existovala.
3. Aby $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.



Dole na obrázku vidíme příklad funkce, která je nespojitá v bodech: $x = 1$, $x = 3$ a $x = 5$.



Příklady. Uvažujme následující funkce: (a) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{pro } x \neq 2 \\ 1 & \text{pro } x = 2 \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{pro } x \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

a hledejme body nespojitosti těchto funkcí.

Řešení. (a) Funkce f je racionální lomená funkce, tedy je spojitá na celém svém definičním oboru $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Bod $x = 2$ je tedy jediným možným bodem nespojitosti.

(b) Zde platí $f(2) = 1$, tedy f je spojitá v bodě $x = 2$, pokud bude platit, že $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3 \neq 1.$$

Tedy f není spojitá v bodě $x = 2$.

(c) Funkce f je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ neboť

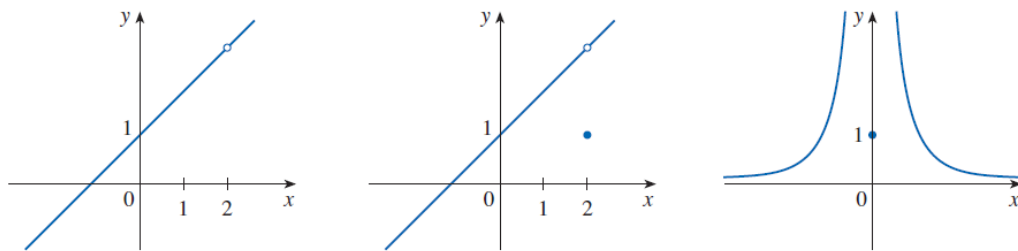
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} = f(a).$$

V bodě $x = 0$ je funkce f spojitá, pokud bude platit, že $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty \neq 1.$$

Tedy f není spojitá v bodě $x = 0$.

Grafy funkcí z příkladů (a), (b) a (c) jsou na obrázku níže.



V bodech a), b) jde o tzv. odstranitelné nespojitosti a v bodě c) má daná funkce neodstranitelnou nespojitost.

Příklad. Funkce

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

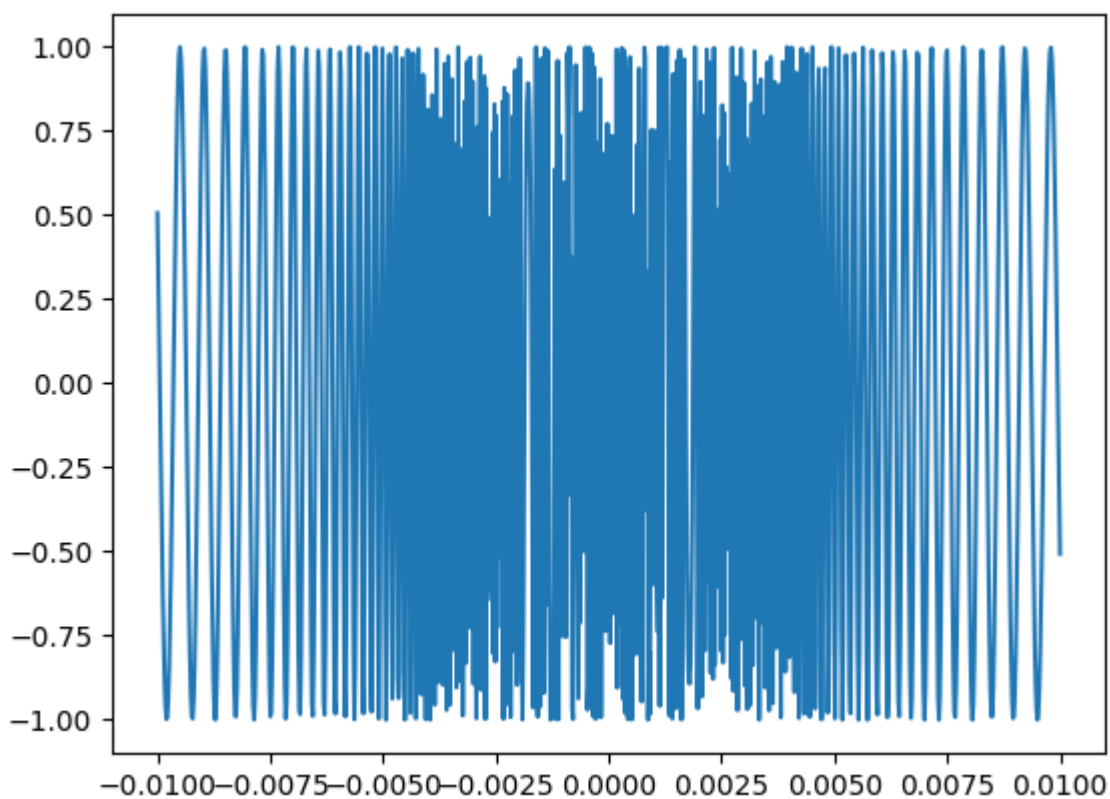
je nespojitá v bodě $x = 0$, ale je spojitá v každém jiném bodě.

In []: *# Zobrazme graf funkce $f(x) = \sin(1/x)$ na okolí nuly.*

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-0.01, 0.01, 1000)
y = np.sin(1/x)

plt.plot(x, y)
plt.show()
```



Definice jednostranné spojitosti. Funkce f je v bodě a **spojitá zprava**, pokud existuje $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ a rovná se $f(a)$. Funkce f je v bodě a **spojitá zleva**, pokud existuje $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ a rovná se $f(a)$.

Poznámka. Z předchozí definice plyne, že funkce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když je spojitá zprava i zleva.

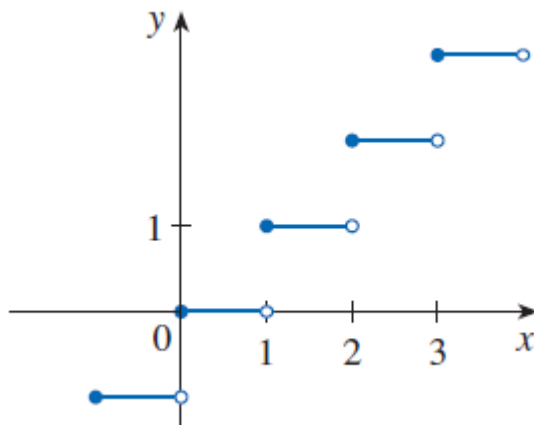
Příklad. Uvažujme funkci danou předpisem

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \text{celá část čísla } x.$$

Funkce f je spojitá zprava v každém bodě $a \in \mathbb{Z}$, ale není spojitá zleva v žádném bodě $a \in \mathbb{Z}$.

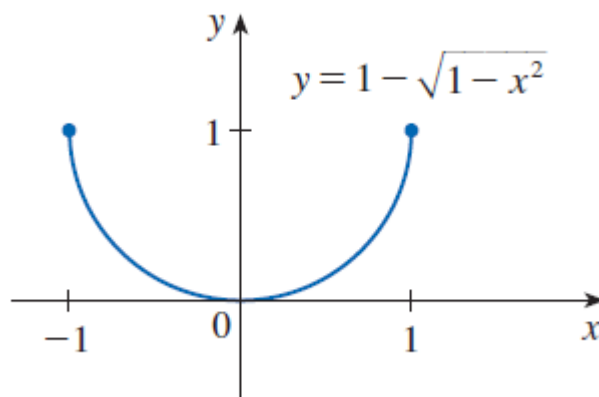
$f(x)$ je největší celé číslo, které je menší nebo rovno x .

Příklady: $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$.



Definice spojitosti na intervalu. Funkce f je na intervalu I **spojitá**, pokud je spojitá v každém bodě $a \in I$. (V koncových bodech intervalu I je třeba uvažovat jednostrannou spojitost.)

Příklad. Funkce $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ je spojitá na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.



Při výpočtu jednostranných limit $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ je třeba použít vzorovou limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

```
In [ ]: # Vytvořme graf funkce g(x) = 1 - x**2
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

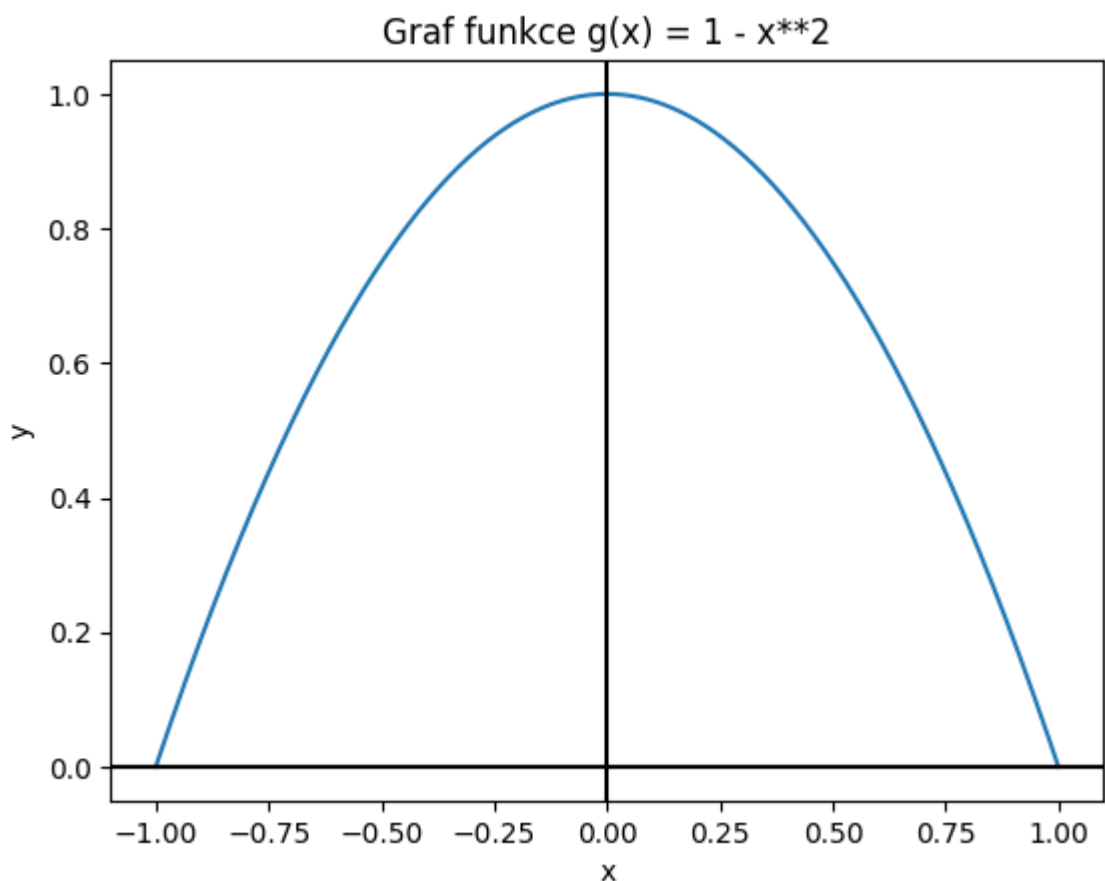
x = np.linspace(-1, 1, 1000)
y = 1 - x**2

plt.plot(x, y)
# přidejme obě osy x a y
plt.axhline(0, color='black')
plt.axvline(0, color='black')

# popisky os
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

# přidáme název grafu
plt.title('Graf funkce g(x) = 1 - x**2')

plt.show()
```



Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (algebra spojitých funkcí). Necht' f a g jsou spojitě funkce v bodě $a \in \mathbb{R}$ a necht' $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Pak jsou následující funkce spojitě v bodě a :

1. $f + g$
2. $f - g$
3. $f \cdot g$
4. $c \cdot f$
5. f/g (pokud $g(a) \neq 0$).

Věta. (a) Polynomická funkce $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ je spojitá na $\mathbb{R}$.

(b) Racionální funkce $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kde p a q jsou polynomy, je spojitá na $\mathbb{R}$ s výjimkou bodů, kde je $q(x) = 0$.

Důkaz. Obě tvrzení plyne z věty o algebře spojitých funkcí. $\square$

Věta. Následující typy funkcí jsou spojitě v každém bodě svého definičního oboru:

- polynomy
- racionální funkce
- exponenciální funkce
- logaritmické funkce
- goniometrické funkce
- cyklometrické funkce
- mocninné funkce

Poznámka. Z předchozí vět tedy plyne, že jakákoli funkce, která vznikne z elementárních funkcí uvedených v předchozí větě pomocí aritmetických operací, je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Příklad. Najděme intervaly, kde je spojitá funkce $f(x) = \frac{\ln x + \arctan x}{x^2 - 1}$.

Řešení. Podle předchozí věty je funkce $y = \ln x$ spojitá na $(0, \infty)$ a funkce $y = \arctan x$ je spojitá na $\mathbb{R}$. Polynom $y = x^2 - 1$ je spojitou funkcí na $\mathbb{R}$. Věta o algebře spojitých funkcí nám říká, že funkce f je spojitá na pro každé $x > 0$ s výjimkou kdy $x^2 - 1 = 0$, tedy pro $x = \pm 1$. Tedy funkce f je spojitá na intervalech $(0, 1)$ a $(1, \infty)$. $\square$

Věta (o limitě složené funkce). Jestliže je funkce g spojitá v bodě b a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, pak $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b)$. Jinými slovy,

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)).$$

Důsledek. Je-li f spojitá v bodě a a funkce g je spojitá v bodě $f(a)$, pak funkce $g \circ f$ je spojitá v bodě a .

Důkaz. Je-li vnitřní funkce f spojitá v bodě a , pak platí

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Dále, pokud předpokládáme, že vnější funkce g je spojitá v bodě $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, pak platí

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x).$$

Odtud plyne

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(a).$$

Tj. složená funkce $g \circ f$ je spojitá v bodě a . $\square$

Příklad. (a) Je možné dokázat, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Použijte větu o limitě složené funkce a vypočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2.$$

Řešení.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1^2 = 1.$$

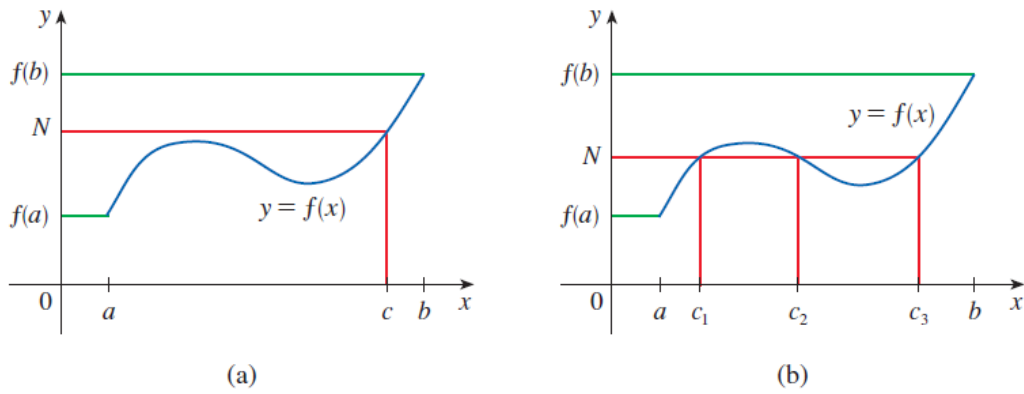
(b) Vypočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \right).$$

Řešení. Funkce $\arcsin$ je spojitá na $\langle -1, 1 \rangle$, potom s využitím věty o limitě složené funkce dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \arcsin \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \right) &= \arcsin \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \right) \\ &= \arcsin \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} \right) \\ &= \arcsin \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \right) \\ &= \arcsin \left(\frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Věta (Bolzanova věta o mezihodnotě). Necht' f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$ a necht' N je reálné číslo mezi $f(a)$ a $f(b)$. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = N$.



Příklad. Dokažme s využitím Bolzanovy věty o mezihodnotě, že algebraická rovnice

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

má reálný kořen v intervalu $(1, 2)$.

Řešení. Definujme funkci f předpisem $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Funkce f je spojitá na intervalu $(1, 2)$ a nabývá na jeho koncích opačných znamének, neboť $f(1) = -1$ a $f(2) = 12$. Pak

$$f(1) < 0 < f(2).$$

Podle Bolzanovy věty o mezihodnotě existuje $c \in (1, 2)$ takové, že $f(c) = 0$. Tedy c je hledaný kořen rovnice. $\square$

Zobrazme si graf funkce f .

```
In [1]: # @title
# Zobrazme graf funkce f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2:

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-1, 2, 1000)
y = 4*x**3 - 6*x**2 + 3*x - 2

# zobrazme přímku y = 0:
plt.plot(x, np.zeros(len(x)), 'r--')

plt.plot(x, y)

# zobrazme popisky os:
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.show()
```

