

Cvičení 1

Přímo z definice dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}.$$

Cvičení 2

Uvažujme funkci f danou předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{pro } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

neexistuje.

Řešení

Nechť $L \in \mathbb{R}$ je libovolné. Potom pro libovolné $\delta > 0$ platí

$$|f(x) - L| = \begin{cases} |0 - L| = |L| & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ |1 - L| & \text{pro } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Je zřejmé, že $\max\{|L|, |1 - L|\} > 0$. Zvolme $\varepsilon = \max\{|L|, |1 - L|\}$. Potom pro libovolné $\delta > 0$ existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $0 < |x - 0| < \delta$ a zároveň $|f(x) - L| = \varepsilon$. To je ve sporu s tím, že $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$. $\square$

Cvičení 3

Najděte $\delta > 0$ takové, že když $0 < |x - 2| < \delta$, pak $|4x - 8| < 0.1$.

Cvičení 4

Dokažte přímo z definice limity, že

1. $\lim_{x \rightarrow 9} (1 - \frac{1}{3}x) = -2$,
2. $\lim_{x \rightarrow 5} (\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}) = 7$.