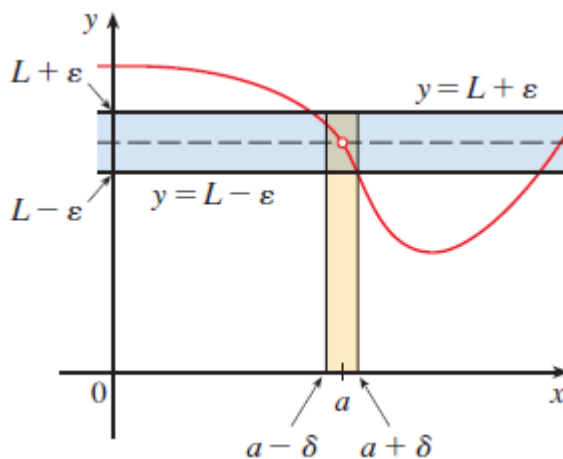


Definice limity

Definice limity funkce v bodě. Mějme danou funkci f definovanou na jistém otevřeném intervalu obsahujícím bod a přičemž bod a sám nemusí patřit do definičního oboru funkce f . Řekneme, že číslo L je **limitou funkce f v bodě a** a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $0 < |x - a| < \delta$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Příklad: Ukažme, že

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7.$$

Řešení: Funkce $f(x) = 4x - 5$ je funkce definovaná na celé reálné ose, takže můžeme zkoumat limitu v bodě $x = 3$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Chceme najít $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $0 < |x - 3| < \delta$ bude platit $|(4x - 5) - 7| < \varepsilon$.

Úpravou zjistíme

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3|.$$

Tedy hledáme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $0 < |x - 3| < \delta$ bude platit $4|x - 3| < \varepsilon$.

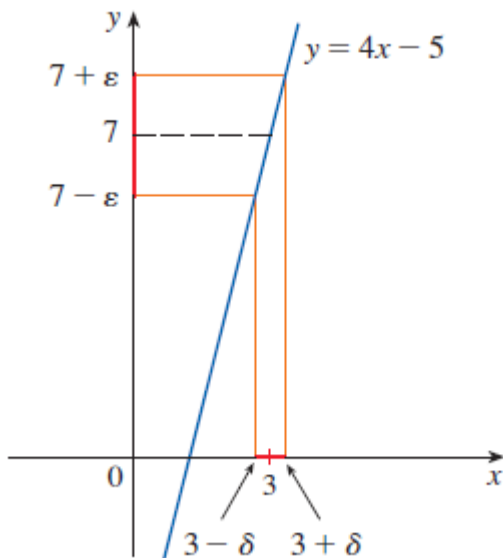
$$4|x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

To naznačuje, že stačí zvolit $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$. Ukažme, že toto δ skutečně vyhovuje.

Předpokládejme tedy, že $0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{4}$. Potom

$$|(4x - 5) - 7| = 4|x - 3| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

To dokazuje, že $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$.



Definice (jednostranné) limity (a) Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L,$$

pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (a - \delta, a)$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(b) Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L,$$

pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (a, a + \delta)$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Příklad. Dokažme přímo z definice, že

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} = 0.$$

Řešení. Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$. Hledejme $\delta > 0$ takové, že

$$\text{když } 0 < x < \delta, \text{ pak } |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon.$$

Tedy

$$\text{když } 0 < x < \delta, \text{ pak } \sqrt{x} < \varepsilon.$$

$$\sqrt{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x < \varepsilon^2.$$

Poslední podmínka napovídá, že $\delta = \varepsilon^2$ vyhovuje. Ukažme, že tato volba vyhovuje.

Je-li $\varepsilon > 0$ libovolné, pak necht' $\delta = \varepsilon^2$. Necht' $0 < x < \delta$. Pak

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Tudíž $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$. Dokázali jsme tedy $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$. $\square$

Definice nevlastní limity. Necht' f je funkce definovaná na jistém otevřeném intervalu obsahujícím bod a přičemž bod a sám nemusí patřit do definičního oboru funkce f .

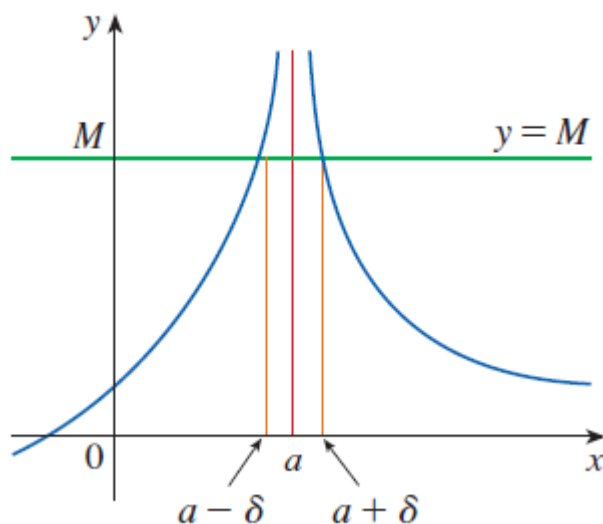
Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

pokud pro každé $M > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (a - \delta, a + \delta)$ pro které je $x \neq a$, platí $f(x) > M$.

Poznámka. Podmínka, že $x \in (a - \delta, a + \delta)$ současně $x \neq a$ je ekvivalentní podmínce:

$$0 < |x - a| < \delta.$$



Příklad. Ukažme podle definice, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Řešení. Necht' $M > 0$. Chceme najít $\delta > 0$ tak, aby pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $0 < |x| < \delta$ platilo $\frac{1}{x^2} > M$.

Platí:

$$\frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow \frac{1}{M} > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{M}} > |x|.$$

Položme tedy $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}}$. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $0 < |x| < \delta$ platí

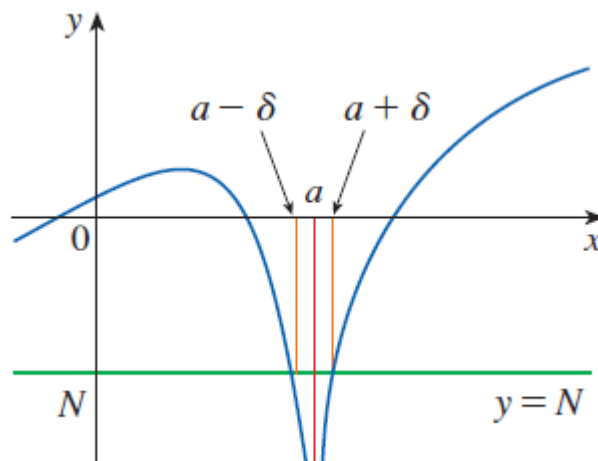
$$\frac{1}{x^2} > M.$$

To dokazuje, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. $\square$

Definice nevlastní limity. Necht' f je funkce definovaná na nějakém otevřeném intervalu obsahujícím bod $a \in \mathbb{R}$. Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty,$$

pokud pro každé $N < 0$ existuje $\delta > 0$ tak, aby pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $0 < |x - a| < \delta$ platilo $f(x) < N$.



Definice nevlastní jednostranné limity. Necht' f je funkce (definovaná na nějakém intervalu $(a, a + K)$, kde $K > 0$.) Pak píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = +\infty,$$

pokud pro každé $M > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé x ($x \in (a, a + K)$) platí

$$x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) > M.$$

Dále píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty,$$

pokud pro každé $N < 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé x ($x \in (a, a + K)$) platí

$$x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) < N.$$

Poznámka. Pojem nevlastní limity $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \pm\infty$ se definuje analogicky. Tedy řekneme, že $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = +\infty$, pokud pro každé $M > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé x ($x \in (a - K, a)$) platí

$$x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) > M.$$

Řekneme, že $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty$, pokud pro každé $N < 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé x ($x \in (a - K, a)$) pro které platí

$$x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) < N.$$

Metody výpočtu limity funkce

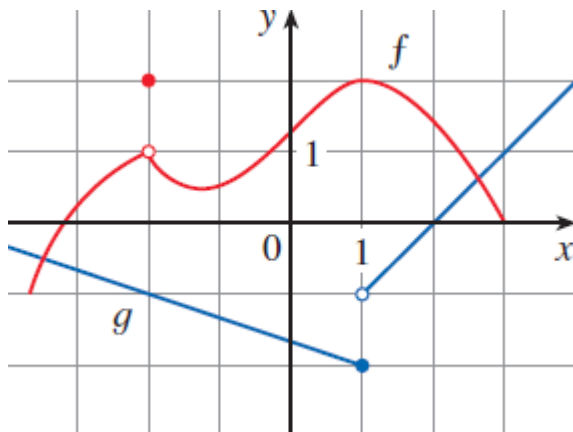
Věta (algebra limit). Necht' $c \in \mathbb{R}$ je konstanta a necht' existují vlastní limity

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Pak platí

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
3. $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x),$
4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ pokud $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$

Příklad. Uvažujme dvě funkce f a g jejichž grafy vydáme dole na obrázku:



Využijme obrázku a výš uvedenou větu k vyčíslení následujících limit:

1. $\lim_{x \rightarrow -2} [f(x) + 5g(x)]$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)g(x)]$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}.$

Řešení:

1. Z grafů obou funkcí f a g je zřejmé, že

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -1.$$

Potom kombinací pravidel 1. a 3. dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} [f(x) + 5g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -2} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2} 5g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} f(x) + 5 \lim_{x \rightarrow -2} g(x) \\ &= 1 + 5(-1) \\ &= -4.\end{aligned}$$

2. Opět z grafů obou funkcí f a g je zřejmé, že

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = -2 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = -1.$$

Tedy oboustranná limita $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ neexistuje, a proto nelze aplikovat pravidlo 4. Nicméně, pravidlo lze použít pro výpočet jednostranných limit, a to

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} [f(x)g(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\ &= 2(-2) \\ &= -4\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} [f(x)g(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \\ &= 2(-1) \\ &= -2\end{aligned}$$

Z těchto výpočtů vyplývá, že oboustranná limita $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)g(x)]$ neexistuje neboť levá a pravá limita nejsou stejné.

3. Opět z grafů obou funkcí f a g lze vyčíst, že

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \approx 1.4 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0.$$

Protože je jmenovatel $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ roven nule, nelze použít pravidlo 5. Uvedená limita neexistuje jako vlastní limita protože limita v čitateli existuje a je nenulová.

Poznámka. Poslední vyšetřovaná limita neexistuje ani v případě, kdy připouštíme nevlastní limity. Totiž vyšetřením jednostranných limit dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{1}{g(x)} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{1}{g(x)} = +\infty.\end{aligned}$$

6. (mocninné pravidlo)

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vzorec lze dokázat matematickou indukcí podle n .

Nejdříve položíme $n = 1$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^1 = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^1.$$

Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n.$$

Nyní dokažme, že vzorec platí i pro $n + 1$. Tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{n+1} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{n+1}.$$

S využitím indukčního předpokladu a pravidla pro výpočet limitu součinu lze psát

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{n+1} &= \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{n+1}. \end{aligned}$$

□

7. (odmocninové pravidlo)

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je-li n sudé, pak je nutné předpokládat, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$.

8.

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

9.

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

10.

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

11.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je-li n sudé, pak je nutné předpokládat, že $a > 0$.

Příklady. Vypočítejme následující limity:

1. $\lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 3x + 4)$
2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

Řešení:

1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \rightarrow 5} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 5} 3x + \lim_{x \rightarrow 5} 4 \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 5} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 5} x + 4 \lim_{x \rightarrow 5} 1 \\ &= 2 \cdot 25 - 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 \\ &= 50 - 15 + 4 \\ &= 39. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow -2} (5 - 3x)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -2} x^3 + 2 \lim_{x \rightarrow -2} x^2 - \lim_{x \rightarrow -2} 1}{\lim_{x \rightarrow -2} 5 - 3 \lim_{x \rightarrow -2} x} \\ &= \frac{-8 + 8 - 1}{5 + 6} \\ &= \frac{-1}{11}. \end{aligned}$$

Věta (substituce v limitě). Je-li funkce f polynom nebo racionální lomená funkce a bod a je v jeho definičním oboru funkce f , pak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Příklad. Vypočítejme následující limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Řešení: Uvažujme funkci $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. Funkce f je racionální lomená funkce a bod $a = 1$ není prvkem jejího definičního oboru. Nicméně, pro $x \neq 1$ platí

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Funkce $g(x) = x + 1$ je polynom a bod $a = 1$ je v jejím definičním oboru. Navíc pro $x \neq 1$ platí $f(x) = g(x)$. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 1 + 1 = 2.$$

Pltí totiž následující tvrzení:

Věta. Jestliže f a g jsou funkce pro něž je $f(x) = g(x)$ když $x \neq a$, potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

pokud alespoň jedna z limit existuje.

Příklad. Vypočítejme následující limitu:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}.$$

Řešení: Uvažujme funkci $f(h) = \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$. Funkce f je racionální lomená funkce a bod $a = 0$ není prvkem jejího definičního oboru. Nicméně, pro $h \neq 0$ platí

$$\begin{aligned} f(h) &= \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} \\ &= \frac{6h + h^2}{h} = \frac{h(6 + h)}{h} = 6 + h. \end{aligned}$$

Protože pro všechna $h \neq 0$ platí $f(h) = 6 + h$, je

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6 + 0 = 6.$$

Příklad. Vypočítejme následující limitu:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}.$$

Řešení: Opět i v tomto případě je limita ve jmenovateli rovna nule, a proto nelze použít pravidlo 5 pro výpočet limity podílu. Nicméně, platí

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2(\sqrt{t^2 + 9} + 3)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2(\sqrt{t^2 + 9} + 3)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \rightarrow 0} (t^2 + 9)} + 3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0 + 9} + 3} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Věta (užití jednostranných limit).

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a+} f(x).$$

Příklad. Ukažme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

Řešení: Pro $x \geq 0$ platí $|x| = x$ a pro $x < 0$ platí $|x| = -x$. Tedy

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Odtud plyne, že

$$\lim_{x \rightarrow 0-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow 0+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0.$$

Z předchozí věty pak plyne, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

Příklad. Ukažme, že limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

neexistuje.

Řešení: Pro $x \geq 0$ platí $|x| = x$ a pro $x < 0$ platí $|x| = -x$. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1,$$

ale

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1.$$

Z předchozí věty pak plyne, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

neexistuje.

Příklad. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4}, & x > 4, \\ 8-2x, & x < 4. \end{cases}$$

Určeme $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

Řešení: Pro $x > 4$ platí $f(x) = \sqrt{x-4}$ a pro $x < 4$ platí $f(x) = 8 - 2x$. Tedy

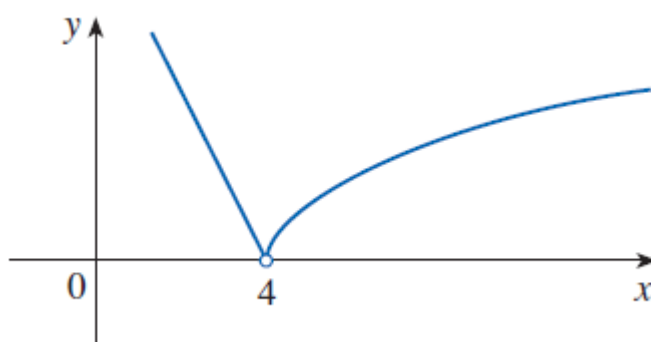
$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (8 - 2x) = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = 0.$$

Protože se sobě rovnají obě jednostranné limity, je i oboustranná limita rovna nule, tj.

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0.$$



Věta (o sevření). Necht' f , g a h jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a (s výjimkou možná samotného bodu a) a necht' platí

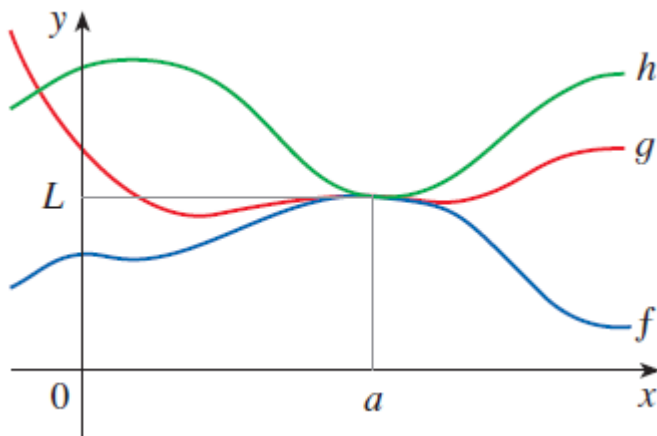
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad x \in \mathcal{O}_a \setminus \{a\}.$$

Jestliže existují limity

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

potom existuje i limita

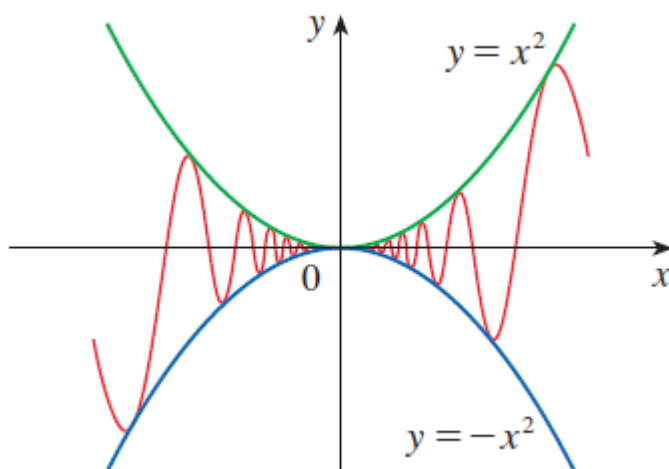
$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$



Poznámka. Pod okolím bodu a rozumíme množinu $\mathcal{O}_a = (a - \delta, a + \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$.

Příklad. Pomocí věty o sevření ukažme, že $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(1/x) = 0$.

Řešení. Pro $x \in \mathcal{O}_0 \setminus \{0\}$ platí $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$. Násobením nerovností $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ číslem x^2 dostaneme $-x^2 \leq x^2 \sin(1/x) \leq x^2$. Protože $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, podle věty o dvou policajtech máme $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(1/x) = 0$.



Poznámka. Pokud uvažujeme dvě funkce $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a jedna z nich bude na okolí bodu $x = a$ omezená a druhá bude mít v tomto bodě limitu rovnu 0, pak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0.$$

Je-li například funkce f na nějakém okolí bodu a omezenou funkcí, potom existuje $M > 0$ tak, že pro každé x z tohoto okolí, $x \neq a$ bude platit

$$-M \leq f(x) \leq M. \quad (1)$$

Dále, pokud víme, že $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, potom také $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = 0$.

Pokud roznásobíme soustavu (1) nezáporným číslem $|g(x)|$, dostaneme

$$-M|g(x)| \leq f(x)g(x) \leq M|g(x)|.$$

Aplikací věty o sevření dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0.$$