

Podposloupnosti a Bolzano-Weierstrassova veta

Cvičení 1

Nechť $q \in \mathbb{R}$ splňuje podmínku $0 < q < 1$. Dokažte, že posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní a určete její limitu.

Řešení

Posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ je zřejmě omezená neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq q^n \leq 1$. Zároveň je monotónní, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $q^n > q^{n+1}$.

Podle Věty o monotónní konvergenci posloupnosti existuje vlastní limita $L = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n$. Dále každá vybraná podposloupnost posloupnosti $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní a její limita je rovna L . Tedy

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{2n} = (\lim_{n \rightarrow \infty} q^n)^2 = L^2.$$

Odtud plyne, že $L = 0$ nebo $L = 1$. Protože je posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ klesající a shora omezená číslem $q < 1$, tak $L = 0$. $\square$

Cauchyovo kritérium konvergence posloupnosti

Cvičení 1

Dokažte přímo z definice, že následující posloupnosti jsou Cauchyovské:

1. $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$,
2. $\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Cvičení 2

Dokažte přímo z definice, že posloupnost $(-1)^n$ není Cauchyovská.