

Bolzano-Weierstrassova věta

Definice (vybraná podposloupnost). Mějme danu posloupnost $X = (a_n)_{n=1}^{+\infty}$ a rostoucí posloupnost přirozených čísel $n_1 < n_2 < \dots < \dots$. Potom posloupnost $X' = (b_k)_{k=1}^{\infty} = (a_{n_k})_{k=1}^{+\infty}$ se nazývá **vybraná podposloupnost** posloupnosti X .

Příklady.

(a) Uvažujme posloupnost $X = (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$. Vybereme-li z této posloupnosti každý druhý člen, dostaneme posloupnost $X' = (b_k)_{k=1}^{\infty} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots)$.

Sestavme rostoucí posloupnost přirozených čísel $n_1 < n_2 < \dots < \dots$ tak, aby platilo:

$$b_k = a_{n_k} = \frac{1}{2k} \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots$$

Tedy $n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = 6, \dots, n_k = 2k, \dots$

Pokud budeme uvažovat rostoucí posloupnost přirozených čísel $n_1 < n_2 < \dots < \dots$ tak, aby platilo:

$$n_k = 2k - 1 \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots,$$

dostaneme posloupnost $X'' = (c_k)_{k=1}^{\infty} = (\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots)$.

Věta. Jestliže reálná posloupnost $X = (a_n)_{n=1}^{+\infty}$ má limitu $a \in \mathbb{R}$, pak každá její vybraná podposloupnost $X' = (b_k)_{k=1}^{\infty} = (a_{n_k})_{k=1}^{+\infty}$ má také limitu a .

Věta (kritérium divergence). Je-li $X = (a_n)_{n=1}^{+\infty}$ posloupnost reálných čísel, potom tato posloupnost je divergentní, tj. nemá vlastní limitu, je-li splněna jedna z následujících podmínek:

(a) Posloupnost X má dvě různé vybrané podposloupnosti, které mají různé limity.

(b) Posloupnost X je neomezená.

Příklady.

(a) Uvažujme posloupnost $X = ((-1)^n)_{n=1}^{+\infty}$. Tato posloupnost nemá vlastní (ani nevlastní) limitu. Vybereme-li z této posloupnosti každý druhý člen, dostaneme posloupnost $X' = (b_k)_{k=1}^{\infty} = ((-1)^{2k})_{k=1}^{+\infty} = (1, 1, 1, \dots)$. Vybereme-li z posloupnosti X každý třetí člen, dostaneme posloupnost $X'' = (c_k)_{k=1}^{\infty} = ((-1)^{2k-1})_{k=1}^{+\infty} = (-1, -1, -1, \dots)$. Posloupnosti X' a X'' mají různé limity, tedy podle kritéria divergence je posloupnost X divergentní.

(b) Uvažujme posloupnost $X = (1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots)$. Tato posloupnost je neomezená, tedy podle kritéria divergence je posloupnost X divergentní.

Věta (o existenci monotónní podposloupnosti). Je-li $X = (a_n)_{n=1}^{+\infty}$ posloupnost reálných čísel, potom existuje monotónní podposloupnost posloupnosti X .

Věta (Bolzano-Weierstrassova). Každá omezená posloupnost reálných čísel má konvergentní podposloupnost.

Důkaz. Necht' $X = (a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je omezená posloupnost reálných čísel. Potom podle předchozí věty má posloupnost X monotónní podposloupnost $X' = (b_k)_{k=1}^{\infty}$. Protože posloupnost X' je omezená, potom v důsledku Věty o monotónní omezené posloupnosti má posloupnost X' vlastní limitu $a \in \mathbb{R}$. Tedy posloupnost X' je konvergentní. $\square$

Cauchyovské posloupnosti

Definice. Řekneme, že posloupnost $X = (a_n)_{n=1}^{+\infty}$ reálných čísel je **Cauchyovská**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n, m \geq n_0$ platí

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Příklady.

(a) Posloupnost $X = (1/n)_{n=1}^{+\infty}$ je Cauchyovská. Skutečně, necht' $\varepsilon > 0$ je zvoleno libovolně. Dále zvolme přirozené číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo $n_0 > 2/\varepsilon$. Potom pro každé $n, m \geq n_0$ platí

$$|a_n - a_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Protože jsme číslo $\varepsilon > 0$ zvolili libovolně, dostáváme, že posloupnost X je Cauchyovská. $\square$

(b) Posloupnost $X = (1 + (-1)^n)_{n=1}^{+\infty}$ není Cauchyovská. Skutečně, necht' $\varepsilon_0 = 2$. Potom pro sudé n platí:

$$|a_{n+1} - a_n| = |1 + (-1)^{n+1} - (1 + (-1)^n)| = 2 = \varepsilon_0.$$

Potom pro každé přirozené číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje sudé $n \geq n_0$ a potom máme:

$$|a_{n+1} - a_n| = \varepsilon_0.$$

To je spor s definicí Cauchyovské posloupnosti a tedy posloupnost X není Cauchyovská. $\square$

Věta. Každá konvergentní posloupnost reálných čísel je Cauchyovská.

Důkaz. Necht' $X = (a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel a $a \in \mathbb{R}$ je její limita. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nyní pro každé $n, m \geq n_0$ máme:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Lemma. Každá Cauchyovská posloupnost reálných čísel je omezená.

Důkaz. Necht' $X = (a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je Cauchyovská posloupnost reálných čísel. Potom pro $\varepsilon = 1$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n, m \geq n_0$ platí

$$|a_n - a_m| < 1.$$

Dále z trojúhelníkové nerovnosti plyne pro každé $n \geq n_0$:

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|.$$

Položíme-li nyní

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\},$$

dostáváme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n| \leq M.$$

Tedy posloupnost X je omezená. □

Věta (Cauchyovo kritérium konvergence posloupnosti). Reálná posloupnost je konvergentní, právě když je Cauchyovská.

Důkaz. Necht' $X = (x_n)_{n=1}^{+\infty}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel. Potom je podle předchozí věty posloupnost X Cauchyovská. Dokažme tedy opačné tvrzení. Necht' $X = (x_n)_{n=1}^{+\infty}$ je Cauchyovská posloupnost reálných čísel. Z předchozího lemmatu plyne, že posloupnost X je omezená. Tedy podle Bolzano-Weierstrassovy věty má posloupnost X konvergentní podposloupnost $X' = (x_{n_k})_{k=1}^{+\infty}$ s limitou $x^* \in \mathbb{R}$. Důkaz nyní dokončíme tím, že když ukážeme, že $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*$.

Za tím účelem zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Protože posloupnost X je Cauchyovská, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n, m \geq n_0$ platí

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Protože platí $x^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k}$, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $n_{k_0} \geq n_0$ tak, že

$$|x_{n_{k_0}} - x^*| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z výše uvedených vlastností vyplývá, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|x_n - x_{n_{k_0}}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Potom pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |x_n - x_{n_{k_0}} + x_{n_{k_0}} - x^*| \\ &\leq |x_n - x_{n_{k_0}}| + |x_{n_{k_0}} - x^*| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Protože jsme číslo $\varepsilon > 0$ zvolili libovolně, dostáváme, že $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*$. $\square$

Příklad. Uvažujme posloupnost $H = (h_n)_{n=1}^{+\infty}$ definovanou předpisem

$$h_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots$$

Ukažme, že posloupnost $H = (h_n)_{n=1}^{+\infty}$ není Cauchyovská. To znamená, že H je divergentní. Pro libovolná přirozená čísla $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ platí:

$$h_m - h_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m} \geq \frac{m-n}{m} = 1 - \frac{n}{m}.$$

Poslední nerovnost platí proto, že pro $i = n+1, n+2, \dots, m$ platí $\frac{1}{i} \geq \frac{1}{m}$.

Odtud pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$h_{2n} - h_n \geq 1 - \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

To dokazuje fakt, že H není Cauchyovská posloupnost. Kdybychom totiž v definici Cauchyovské posloupnosti zvolili např. $\varepsilon = \frac{1}{2}$, pak by pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ existovalo $n \geq n_0$ tak, že $|h_{2n} - h_n| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$, což je spor s definicí Cauchyovské posloupnosti. $\square$

Kontraktivní posloupnosti

Definice. Řekneme, že posloupnost $X = (x_n)_{n=1}^{+\infty}$ reálných čísel je **kontraktivní**, jestliže existuje $q \in (0, 1)$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq q|x_{n+1} - x_n|.$$

Věta. Každá kontraktivní posloupnost reálných čísel je Cauchyovská je tedy také konvergentní.

Důkaz. Necht' $X = (x_n)_{n=1}^{+\infty}$ je kontraktivní posloupnost reálných čísel. Potom existuje $q \in (0, 1)$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq q|x_{n+1} - x_n|.$$

Odtud lze odvodit, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - x_{n+1}| &\leq q|x_{n+1} - x_n| \leq q^2|x_n - x_{n-1}| \\ &\leq q^3|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \dots \leq q^n|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Pro libovolná přirozená čísla $m, n \in \mathbb{N}$, pro která je $m > n$ platí s využitím trojúhelníkové nerovnosti

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \dots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (q^{m-2} + q^{m-3} + \dots + q^{n-1})|x_2 - x_1| \\ &= q^{n-1}(1 + q + \dots + q^{m-n-1})|x_2 - x_1| \\ &= q^{n-1} \left(\frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} \right) |x_2 - x_1| \\ &\leq \frac{q^{n-1}}{1 - q} |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Nyní protože je $q \in (0, 1)$, platí $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. Odtud a z předchozího odhadu pak plyne, že $X = (x_n)_{n=1}^{+\infty}$ je Cauchyovská posloupnost. $\square$

Příklad. Uvažujme tzv. Fibonacciho posloupnost $F = (F_n)_{n=1}^{+\infty}$ definovanou předpisem

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots$$

Potom pro každé přirozené $n \in \mathbb{N}$ položíme $x_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$. Potom posloupnost $X = (x_n)_{n=1}^{+\infty}$ je kontraktivní.

Nejdříve provedme experiment a vyčíslíme několik prvních členů posloupnosti X :

In []: *# napíšme si funkci, která bude vracet n-tý člen posloupnosti*

```
def F(n):
    if n == 1 or n == 2:
        return 1
    else:
        return F(n - 1) + F(n - 2)

def X(n):
    return F(n) / F(n + 1)
```

In []: *# Nyní si nechejme vypsát prvních 10 členů posloupnosti X*

```
for n in range(1, 11):
    print(X(n))
```

```

1.0
0.5
0.6666666666666666
0.6
0.625
0.6153846153846154
0.6190476190476191
0.6176470588235294
0.6181818181818182
0.6179775280898876

```

In []: *# Dále se pokusme odhadnout konstantu q kontrakce posloupnosti x*

```

for n in range(1, 21):
    print(abs(X(n + 2) - X(n + 1)) / abs(X(n + 1) - X(n)))

```

```

0.33333333333333326
0.4
0.37500000000000044
0.3846153846153829
0.38095238095238093
0.38235294117647056
0.38181818181815297
0.38202247191019634
0.381944444444473125
0.38197424892633025
0.3819628647190943
0.38196721311712023
0.3819655521742569
0.38196618660004217
0.38196594438269976
0.38196603674037044
0.38196600124734864
0.381966014914938
0.3819660117057416
0.3819660143730841

```

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$x_{n+1} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+1} + F_n} = \frac{1}{1 + \frac{F_n}{F_{n+1}}} = \frac{1}{1 + x_n}.$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}, n > 1$ platí

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{1 + x_n} - \frac{1}{1 + x_{n-1}} \\
 &= \frac{1 + x_{n-1} - 1 - x_n}{(1 + x_n)(1 + x_{n-1})} \\
 &= \frac{x_{n-1} - x_n}{(1 + x_n)(1 + x_{n-1})}.
 \end{aligned}$$

Odtud snadno plyne

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{(1 + x_n)(1 + x_{n-1})}.$$

Dále lze snadno dokázat indukcí a s využitím rekurzivního vztahu $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1.$$

Odtud plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x_n} \leq \frac{2}{3}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ platí

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= \frac{|x_n - x_{n-1}|}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} \\ &\leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} |x_n - x_{n-1}| \\ &\leq \frac{4}{9} |x_n - x_{n-1}|. \end{aligned}$$

Takto jsme dokázali kontraktivitu posloupnosti X s konstantou $q = \frac{4}{9}$. Tedy podle předchozí věty je posloupnost X Cauchyovská a tedy konvergentní. $\square$

Poznámka. Pokud v předchozím příkladu položíme $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, pak z rovnice $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ plyne $x = \frac{1}{1+x}$, tj. $x^2 + x - 1 = 0$. Odtud plyne, že $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ nebo $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Protože $x_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, dostáváme, že $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.618034\dots$

Převrácená hodnota čísla x se nazývá **zlatý řez** a označuje se řeckým písmenem φ . Platí $\varphi = \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618034\dots$

Toto číslo má celou řadu zajímavých matematických vlastností. Jednou z těchto vlastností je tzv. Binetův vzorec pro výpočet n -tého členu Fibonacciho posloupnosti:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}},$$

kde $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618034\dots$

O zlatém řezu se lze dočíst např. na [Wikipedii](#).

Příklad. Uvažujme posloupnost $X = (x_n)_{n=1}^{+\infty}$ definovanou předpisem

$$x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{(n+2)^2},$$

a

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_{n+2} - x_{n+1}|}{|x_{n+1} - x_n|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 4n + 4} = 1. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že posloupnost X není kontraktivní. Na druhé straně bylo již dříve dokázáno, že je tato posloupnost konvergentní a tudíž je také Cauchyovská. Tento příklad ukazuje, že předchozí větu nelze obrátit. Tj. z toho, že je daná posloupnost Cauchyovská, nelze usuzovat, že je kontraktivní. $\square$