

Konvergence posloupností - Cvičení

Pojem posloupnosti

Cvičení 1

Mějme dānu posloupnost $(\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty}$. Vypišme prvních několik členů této posloupnosti.

Řešení

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \dots, a_n = \frac{1}{2^n}.$$

Zde je výsledek:

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots \right\}$$

Cvičení 2

Uvažujme posloupnost $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=2}^{\infty}$. Vypište jejích prvních 10 členů.

Řešení

Prvním členem bude člen $a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$, druhým členem bude člen $a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$, třetím členem bude člen $a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$, atd.

Výsledek:

$$\left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}, \frac{11}{12}, \dots \right\}.$$

Cvičení 3

Tzv. **Fibonacciho posloupnost** je obvykle definována jako posloupnost $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ předpisem:

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad \text{pro } n \geq 1.$$

Vypište prvních několik členů této posloupnosti.

Řešení

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots\}.$$

Limita posloupnosti

Cvičení 1

Vypočtěte následující limity:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3}{n^2+1}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} \right)$

Cvičení 2

Uvažujme posloupnost $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou předpisem $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$. Dokažme, že je tato posloupnost rostoucí a omezená shora. Odsud pak vyvodíme, že tato posloupnost je konvergentní.

(**Návod:** Je-li $k \geq 2$, pak platí $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.)

Cvičení 3

S využitím metody uvedeného v příkladu z přednášky vypočítejte hodnotu $\sqrt{2}$ s přesností na 4 desetinná místa.

Řešení

K výpočtu použijeme posloupnost $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou předpisem $x_1 = 1$ a $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$ pro $n \geq 1$.

In []: *# vytvořme funkci, která bude vracet n-tý člen xi*

```
def x(n):
    if n == 1:
        return 1
    else: # n > 1
        return (1/2) * (x(n-1) + 2/x(n-1))
```

Podmínka, kdy výpočet lze ukončit je

$$\frac{x_n^2 - 2}{x_n} < 10^{-4}.$$

In []: *# napíšme cyklus, který bude počítat postupně členy xti*
a v každém běhu cyklu zkontrolujeme, zda-li je chyba menší než 10⁻⁶

```
n = 2
tolerance = 10**(-4)

while True:
    if (x(n)**2 - 2) / x(n) < tolerance:
        print(x(n))
        break
    else:
        n += 1
```

1.4142156862745097

Odpověď: $\sqrt{2} \approx 1.4142$.