

Konvergence posloupností

Pojem reálné posloupnosti

Definice. Reálnou posloupností rozumíme zobrazení $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Místo $a(n)$ píšeme a_n a říkáme, že a_n je n -tý člen posloupnosti a . Posloupnost, jejímž n -tým členem je a_n budeme značit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo (a_n) .

Někdy je a_n definován jen pro $n \geq n_0$ a v takovém případě se říká, že posloupnost začíná od n_0 . V takovém případě se zapisuje $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$.

Příklady posloupností.

(a) **Aritmetická posloupnost.** Uvažujme parametry $d \neq 0, a$ a definujme $a_1 = a$. Potom pro každé $n > 1$ definujeme $a_n = a_{n-1} + d$. Parametr d se nazývá **diference posloupnosti**.

Například, je-li $a = 0,5$ a $d = 2$, pak $a_1 = a = 0,5$, $a_2 = a_1 + d = 0,5 + 2 = 2,5$, $a_3 = a_2 + d = 2,5 + 2 = 4,5$ atd.

Z definice plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$ platí: $a_n - a_{n-1} = \text{konst.} = d$.

Obecně platí: $a_1 = a, a_2 = a + d, a_3 = a + 2d, \dots, a_n = a + (n-1)d$.

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = a + (n-1)d, \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}$$

(b) **Geometrická posloupnost.** Uvažujme dva parametry $a \neq 0$ a $q \neq 0, 1$. Posloupnost (a_n) definujeme předpisem:

$$a_1 = a, \quad a_n = a_{n-1} \cdot q, \quad n \in \mathbb{N}, n > 1.$$

Například $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kde $a_n = \frac{1}{2^n}$ je geometrická posloupnost, přičemž $a = 1/2$ a $q = 1/2$.

Limita posloupnosti

Definice limity posloupnosti

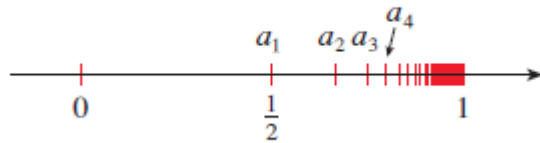
Příklad. Uvažujme posloupnost danou předpisem

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

Prvních pár členů posloupnosti je

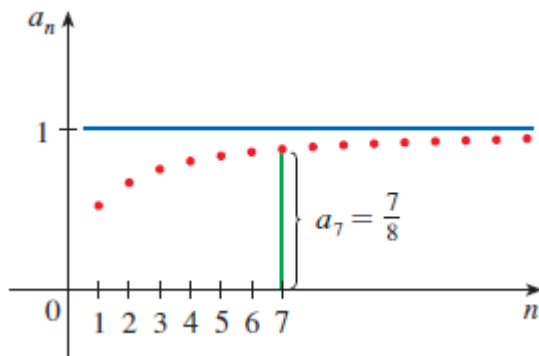
$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{3}{4}, \quad a_4 = \frac{4}{5}, \quad a_5 = \frac{5}{6}, \quad \dots$$

Pokud si zobrazíme hodnoty členů posloupnosti na číselné ose, můžeme si všimnout, že se hodnoty členů posloupnosti blíží k hodnotě 1. Viz obrázek níže.



Graf této posloupnosti je množinou bodů:

$$\left\{ \left(n, \frac{n}{n+1} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$



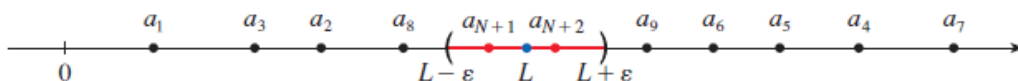
Z obou obrázků je patrné, že hodnoty a_n se koncentrují kolem hodnoty 1 pro rostoucí n .

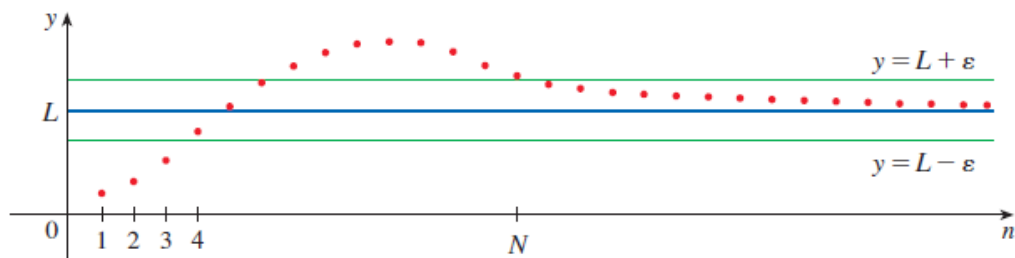
Je též snadné ukázat, že rozdíl

$$1 - a_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

může být tak malý, jak chceme, pokud n je dostatečně velké. (To je přece důsledek tzv. Archimédovy vlastnosti množiny $\mathbb{R}$, kterou jsme si připomněli v předchozí lekci.)

Definice limity posloupnosti. Posloupnost (a_n) má limitu L (značíme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ nebo $a_n \rightarrow L$ pro $n \rightarrow \infty$), pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > N$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.





Věta (Jednoznačnost limity). Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Nechť (a_n) je konvergentní posloupnost a platí, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L'.$$

Nechť $\varepsilon > 0$ a $N \in \mathbb{N}$ takové, že současně platí

$$\forall n > N : |a_n - L| < \varepsilon/2$$

a

$$\forall n > N : |a_n - L'| < \varepsilon/2.$$

Odtud pak plyne s využitím trojúhelníkové nerovnosti, že $\forall n > N$ platí

$$|L - L'| = |L - a_n + a_n - L'| \leq |L - a_n| + |a_n - L'| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Protože jsme de facto dokázali, že pro každé $\varepsilon > 0$ platí:

$$|L - L'| < \varepsilon.$$

Tedy $|L - L'| = 0$, což znamená, že $L = L'$. $\square$

Příklad. Uvažujme posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Ukažme, že potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Důkaz. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Z Archimédovy vlastnosti reálných čísel plyne existence $N \in \mathbb{N}$ takové, že $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Potom pro každé $n > N$ platí

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Věta (Základní vlastnosti limity). Mějme dány dvě konvergentní posloupnosti (a_n) a (b_n) a necht' $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Potom platí:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ pokud } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0.$$

Věta (Mocnina posloupnosti). Necht' (a_n) je konvergentní posloupnost a $k \in \mathbb{N}$. Potom platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k.$$

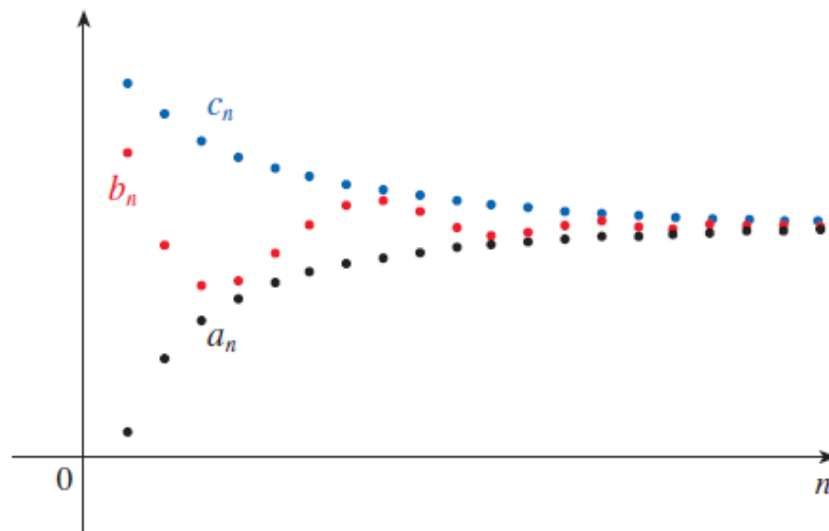
Je-li $p > 0, p \in \mathbb{R}$ a $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^p.$$

Věta (O třech posloupnostech). Necht' (a_n) , (b_n) a (c_n) jsou posloupnosti takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.



Důsledek. Pokud platí $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Důkaz. Zřejmě platí $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$. Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} -|a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, podle věty o třech posloupnostech dostáváme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. $\square$

Příklad. Najděme limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}.$$

Řešení.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\
 &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})} \\
 &= \frac{1}{1+0} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Příklad. Uvažujme posloupnost $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou předpisem:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Ukažme, že tato posloupnost je konvergentní a najděme její limitu.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned}
 x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
 x_n/2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

Odtud odečtením druhé rovnice od první dostáváme:

$$x_n/2 = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$x_n = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Neboť $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$, podle věty o aritmetice limit dostáváme $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 - 0 = 2$. $\square$

Poznámka. Sami se pokuste najít limitu posloupnosti $Y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ definované předpisem:

$$y_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je konstanta pro niž platí $|q| < 1$.

Příklad. Předpokládejme, že $q \in \mathbb{R}$ je konstanta pro niž platí $|q| < 1$. Ukažte, že posloupnost $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ definovaná předpisem:

$$x_n = q^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

je konvergentní a najděte její limitu.

Řešení. Necht' $n \in \mathbb{N}$ a $0 < q < 1$. Potom:

$$\frac{1}{q} = 1 + x,$$

kde $x = \frac{1}{q} - 1 > 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí v důsledku Bernoulliho nerovnosti:

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n = (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Zvolme nyní libovolné $\varepsilon > 0$. Necht' $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $n_0 x \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geq n_0$, platí:

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n \geq 1 + nx \geq 1 + n_0 x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Odtud již snadno plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geq n_0$, nerovnost:

$$|q^n - 0| = q^n < \varepsilon.$$

Dokázali jsme tedy, že $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. $\square$

Poznámka. Pro $q = 0$ je pro každé $n \in \mathbb{N}$ $q^n = 0$ a tudíž je $\lim_n q^n = \lim_n 0^n = 0$. Pokud $-1 < q < 0$, tak potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $|q^n| = |q|^n$ a dále víme z důkazu, že $\lim_n |q|^n = 0$. Pak platí: $\lim_n |q^n| = 0$ a tudíž také $\lim_n q^n = 0$.

Omezené posloupnosti

Definice. Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **omezená shora**, pokud existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq M$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Definice. Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **omezená zdola**, pokud existuje $m \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \geq m$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Definice. Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **omezená**, pokud je omezená shora i zdola.

Věta (O limitě součinu posloupností). Necht' $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a posloupnost (b_n) je omezená. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

Důkaz. Abychom dokázali, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$, musíme dokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|a_n b_n - 0| < \varepsilon$. Zvolme tedy libovolné $\varepsilon > 0$.

Z omezenosti posloupnosti (b_n) plyne existence konstanty $M > 0$ takové, že $|b_n| \leq M$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$. Zvolme $n \geq n_0$. Potom

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

$\square$

Příklad. Najděte limitu následující posloupnosti pokud existuje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

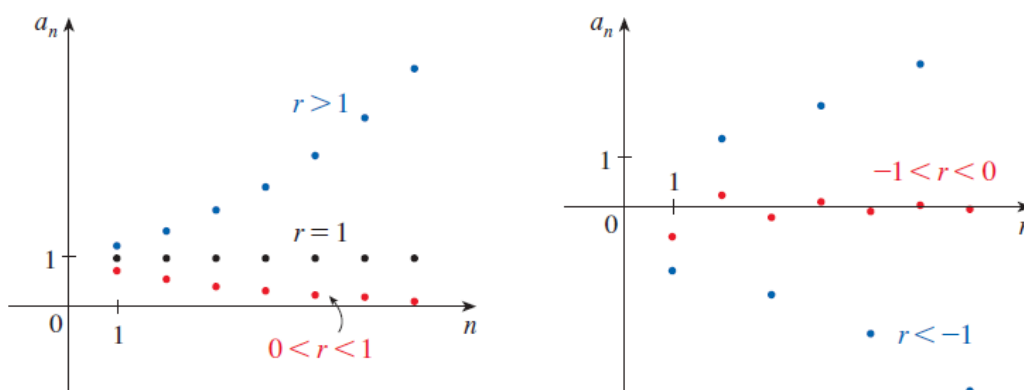
Řešení. Posloupnost $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ lze vyjádřit jako součin dvou posloupností:

$$\frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}.$$

Zde posloupnost $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|(-1)^n| \leq 1$. Dále posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Podle věty o limitě součinu posloupností dostáváme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. $\square$

Věta. Posloupnost $(r^n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní právě tehdy, když $-1 < r \leq 1$. Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0, & \text{pokud } -1 < r < 1, \\ 1, & \text{pokud } r = 1. \end{cases}$$



Monotónní posloupnosti

Definice: Řekneme, že posloupnost (a_n) je **rostoucí**, pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$, a **klesající**, pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$.

Dále řekneme, že posloupnost (a_n) je **neklesající**, pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$, a **nerostoucí**, pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

Konečně posloupnost (a_n) je **monotónní**, pokud je neklesající nebo nerostoucí.

Příklad. Ukažme, že posloupnost (a_n) definovaná předpisem $a_n = \frac{3}{n+5}$ je klesající.

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

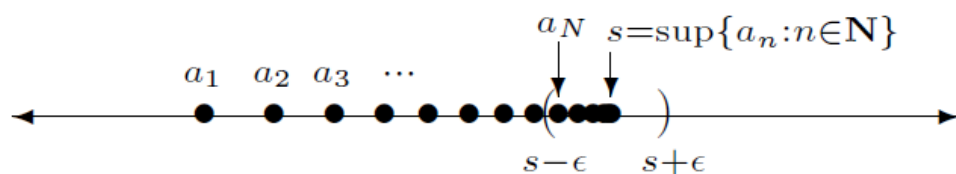
$$a_n = \frac{3}{n+5} > \frac{3}{n+6} = \frac{3}{(n+1)+5} = a_{n+1}.$$

Posloupnost (a_n) je tedy klesající. $\square$

Věta (o monotónní konvergentní posloupnosti). Každá monotónní a omezená posloupnost je konvergentní.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že posloupnost (a_n) je neklesající a omezená. V důkazu využijeme **Axiom o úplnosti**. Položme $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Z omezenosti posloupnosti (a_n) plyne, že množina A je neprázdná a shora omezená. Nyní nechť s je nejmenší horní závora množiny A . Ukážeme, že s je limitou posloupnosti (a_n) . Zvolme za tím účelem libovolně $\varepsilon > 0$. Protože s je nejmenší horní závora množiny A , existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $s - \varepsilon < a_N \leq s$. Jelikož je posloupnost (a_n) neklesající, pro každé $n \geq N$ platí $a_N \leq a_n \leq s$. Z toho plyne, že $|a_n - s| < \varepsilon$ pro každé $n \geq N$. Tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$. $\square$



Příklad. Ukažme, že posloupnost (a_n) definovaná předpisem $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ je konvergentní.

Důkaz. Připomeňme si tzv. **binomickou poučku**:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Zde $\binom{n}{k}$ je tzv. **binomický koeficient**, který je definován jako

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{N}, k \leq n.$$

Nyní s využitím binomické poučky můžeme psát

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)}{n!} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-2}{n}\right) \end{aligned}$$

Dále obdobným způsobem lze vyjádřit následující člen a_{n+1} :

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \\
 &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
 &\quad + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).
 \end{aligned}$$

Odtud plyne, že pro $n \geq 1$ platí: $a_n < a_{n+1}$. Tedy posloupnost (a_n) je rostoucí. Snadno totiž vidíme, že platí:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) &< \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \\
 \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) &< \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right), \\
 &\vdots \\
 \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) &< \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right).
 \end{aligned}$$

Platí tedy:

$$2 = a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$$

Uvedme ještě jeden důkaz toho, že posloupnost (a_n) je rostoucí. Využijeme k tomu tzv. **Bernoulliho nerovnost**. Ta říká, že pro $x \geq -1$ a $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Pro libovolné $n \geq 2$ plyne užitím Bernoulliho nerovnosti

$$\begin{aligned}
 \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > \\
 &> \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{n}{n^2}\right) = 1.
 \end{aligned}$$

Odsud pak plyne, že $a_n > a_{n-1}$ pro $n \geq 2$. Tedy posloupnost (a_n) je rostoucí.

Dále ukažme, že posloupnost (a_n) je shora omezená. Platí totiž:

$$\begin{aligned}
 2 < a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
 &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 1
 \end{aligned}$$



Dokázali jsme takto, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $2 < a_n < 3$. Tedy posloupnost (a_n) je shora omezená. Zároveň jsme ukázali, že posloupnost (a_n) je rostoucí. Tedy podle věty o limitě monotónní posloupnosti je posloupnost (a_n) konvergentní. $\square$

Příklad. Uvažujme posloupnost $S = (s_n)_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $s_1 > 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $s_{n+1} = \frac{1}{2}(s_n + \frac{a}{s_n})$, kde $a > 0$. Ukažme, že posloupnost S je konvergentní a že její limita je $\sqrt{a}$.

Řešení. Nejdříve ukažeme, že pro $n \geq 2$ platí $s_n^2 \geq a$. Platí totiž, že n -tý člen splňuje kvadratickou rovnici

$$s_n^2 - 2s_{n+1}s_n + a = 0.$$

Tato rovnice má reálný kořen a tudíž musí být diskriminant nezáporný, tj.

$$4s_{n+1}^2 - 4a \geq 0.$$

Odtud plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $s_{n+1}^2 \geq a$. Dále ukažme, že posloupnost (s_n) je nerostoucí. Platí totiž:

$$s_n - s_{n+1} = s_n - \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{a}{s_n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(s_n^2 - a)}{s_n} \geq 0.$$

Tedy pro lib. $n \geq 2$ platí $s_n \geq s_{n+1}$. Posloupnost (s_n) je tedy nerostoucí a omezená posloupnost a tudíž podle věty o monotónní konvergentní posloupnosti je posloupnost (s_n) konvergentní. Označme její limitu s . Potom platí:

$$s = \frac{1}{2}\left(s + \frac{a}{s}\right).$$

Odtud vyplývá, že $s = \frac{a}{s}$, nebo $s^2 = a$. Tedy $s = \sqrt{a}$. Pro každé $n \geq 2$ platí

$$\frac{a}{s_n} \leq \sqrt{a} \leq s_n.$$

Tudíž máme

$$0 \leq s_n - \sqrt{a} \leq s_n - \frac{a}{s_n} = \frac{s_n^2 - a}{s_n} \quad \text{pro každé } n \geq 2.$$

Tento odhad lze použít pro odhad chyby aproximace $\sqrt{a}$ pomocí s_n . $\square$

Nevlastní limity

Definice. Řekneme, že posloupnost (a_n) má **nevlastní limitu** $+\infty$ (resp. $-\infty$), pokud pro každé $M \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n > M$ (resp. $a_n < M$). Potom píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$).

Věta. Je-li (a_n) posloupnost neklesající a shora neomezená, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. Analogicky, je-li posloupnost (b_n) nerostoucí a zdola neomezená, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.

Cvičení. Dokažte předchozí větu.

Cvičení. Dokažte, že každá konvergentní posloupnost je omezená.

Příklad. Uvažujme tzv. **Fibonacciho posloupnost** (F_n) definovanou předpisem $F_0 = 0, F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$ platí $F_n \geq n$. Tuto vlastnost dokážeme matematickou indukcí.

Pro $n = 0$ a $n = 1$ platí $F_0 = 0 \geq 0$ a $F_1 = 1 \geq 1$. Předpokládejme, že pro $i \in \{5, \dots, n\}$ platí $F_i \geq i$, kde $n \geq 6$. Potom ukažme, že $F_{n+1} \geq n + 1$. Platí:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geq n + F_{n-1} \geq n + (n-1) = 2n - 1 \geq n + 1.$$

Dále je snadno vidět, že posloupnost $(F_n)_n$ je neklesající. Dále z předchozí dokázané nerovnosti $F_n \geq n$ plyne, že posloupnost (F_n) je shora neomezená. Tedy podle předchozí věty $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = +\infty$. $\square$

```
In [ ]: # Napišme funkci, která bude vracet n-tý člen Fibonacciho posloupnosti
def fibonacci(n):
    if n == 1 or n == 2:
        return 1
    else:
        return fibonacci(n-2) + fibonacci(n-1)

# Vytvořme seznam prvních 20 členů Fibonacciho posloupnosti
fibonacci_list = [fibonacci(i) for i in range(1, 21)]
print(fibonacci_list)
```

[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765]

```
In [ ]: # Nyní vytvořme seznam poměrů dvou po sobě jdoucích členů Fibonacciho posloupnosti

memo = {}
def fib(n):
    if n in memo:
        return memo[n]
    if n == 1 or n == 2:
        return 1
    else:
        memo[n] = fib(n-2) + fib(n-1)
        return memo[n]

fibonacci_ratio = [fib(i+1)/fib(i) for i in range(1, 200)]
print(fibonacci_ratio)

# Nyní vytvořme seznam rozdílů dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti
# fibonacci(n+1)/fibonacci(n)

def a(n):
    return fib(n+1)/fib(n)

fibonacci_difference = [a(i) - a(i-1) for i in range(1, 200)]
print(fibonacci_difference)
```

```
In [ ]: def fib(n):
    a, b = 0, 1
    for _ in range(n):
```

```

        a, b = b, a + b
    return a

def a(n):
    return fib(n+1)/fib(n)

fibonacci_ratio = [fib(i+1)/fib(i) for i in range(1, 10)]
print(fibonacci_ratio)
print()
print(" "*50)

fibonacci_difference = [a(i) - a(i-1) for i in range(2, 15)] # Změněno z range(
for n, value in zip(range(1, len(fibonacci_ratio)), fibonacci_difference):
    print(f"a_{n+1} - a_{n} = {value}")

```

```

[1.0, 2.0, 1.5, 1.6666666666666667, 1.6, 1.625, 1.6153846153846154, 1.61904761904
7619, 1.6176470588235294]

```

```

*****

```

```

a_2 - a_1 = 1.0
a_3 - a_2 = -0.5
a_4 - a_3 = 0.16666666666666674
a_5 - a_4 = -0.06666666666666665
a_6 - a_5 = 0.02499999999999991
a_7 - a_6 = -0.009615384615384581
a_8 - a_7 = 0.00366300366300365
a_9 - a_8 = -0.0014005602240896309

```