

Reálná čísla - cvičení

Absolutní hodnota

Absolutní hodnota reálného čísla x je definována jako

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0, \\ -x & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Cvičení 1

Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Řešení

Rozebereme různé případy:

1. $a \geq 0$ a $b \geq 0$
2. $a < 0$ a $b < 0$
3. $a \geq 0$ a $b < 0$
4. $a < 0$ a $b \geq 0$

Uvažujme například případ 3. Tj. $a \geq 0$ a $b < 0$.

a) Necht' $a + b \geq 0$. Pak

$$|a| + |b| = a + (-b) \geq a + b = |a + b|.$$

b) Necht' $a + b < 0$. Potom

$$|a| + |b| = a + (-b) \geq -a + (-b) = -(a + b) = |a + b|.$$

Poznámka. Pomocí důkazu matematickou indukcí dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

Cvičení 2

Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Řešení

Zvolme libovolné $a, b \in \mathbb{R}$, pak platí:

$$\begin{aligned} |a| &= |a - b + b| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \\ \iff |a| - |b| &\leq |a - b| \end{aligned}$$

Podobně

$$\begin{aligned} |b| &= |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| \\ \iff |b| - |a| &\leq |b - a| \\ \iff -(|a| - |b|) &\leq |b - a|. \end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy, že

$$\pm(|a| - |b|) \leq |a - b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

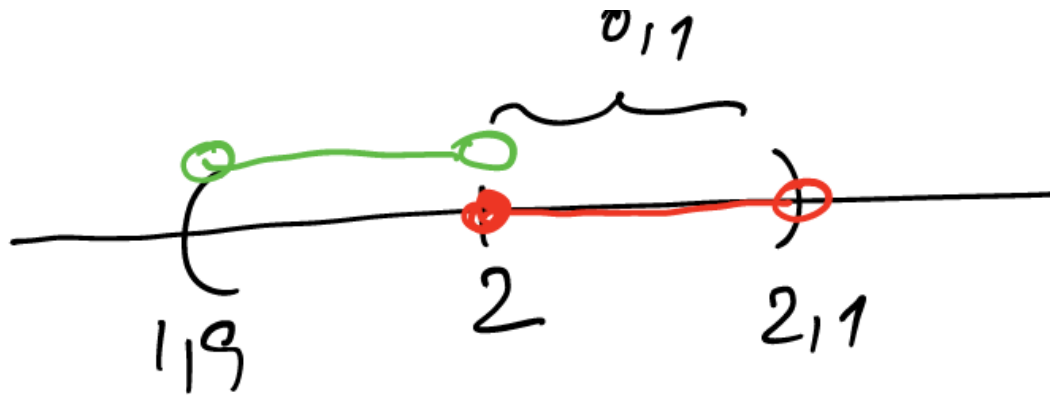
Tímto jsme dokázali požadovanou nerovnost.

Cvičení 3

Zapište řešení následující nerovnice pomocí intervalového zápisu:

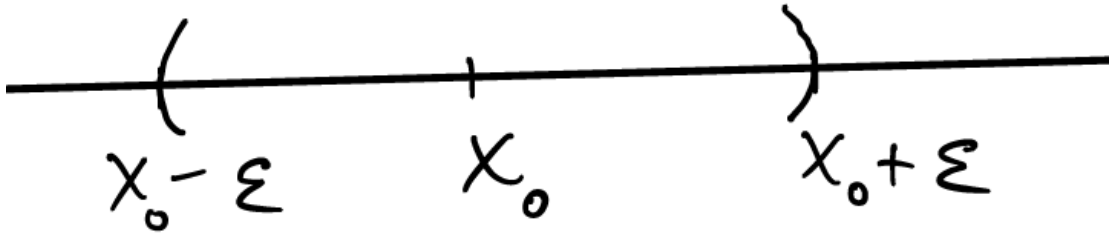
$$|x - 2| \leq 0,1.$$

Řešení



$$|x - 2| \leq 0,1 \iff -0,1 \leq x - 2 \leq 0,1 \iff 1,9 \leq x \leq 2,1.$$

Poznámka. Obecně, je-li $x_0 \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak je řešením nerovnice $|x - x_0| < \varepsilon$ každé $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.



Suprémum množiny

Cvičení 4

Uvažujme množinu $A \subset \mathbb{R}$, kde $A = \langle 0, 1 \rangle$. Nalezněme potom suprémum množiny A .

Řešení

Množina A je neprázdnou a shora omezenou podmnožinou $\mathbb{R}$. Dále

$$H = \{h \in \mathbb{R} : h \text{ je horní závora množiny } A\} = \langle 1, \infty \rangle.$$

Konečně neboť $\sup A$ je nejmenším prvkem množiny H a tedy $\sup A = 1$.

Cvičení 5

Uvažujme množinu $A \subset \mathbb{R}$ a předpokládejme, že $m \in A$ je její největší prvek. Dokažte, že m je suprémem množiny A .

Řešení

Ukažme, že za daných předpokladů je číslo m horní hranicí množiny A . Skutečně, pro každé $x \in A$ pro které je $x \neq m$ platí $x < m$. Odtud plyne

$$\forall x \in A : x \leq m.$$

Tedy m je horní hranicí množiny A .

Zbývá ukázat, že m je nejmenší horní mezí množiny A . Předpokládejme tedy, že $y < m$. Pak zřejmě y není horní mezí množiny A neboť $m \in A$.