

Úvod

Literatura

1. Jarník, V.: Diferenciální počet I, Academia, Praha, 1984 ?
2. Kopáček, J.: Matematika nejen pro fyziky I, Matfyzpress, Praha, 2005 ?
3. Veselý, J.: Matematická analýza pro učitele, Matfyzpress, Praha, rok ?

Reálná čísla

Důkaz matematickou indukcí

Příklad. Pomocí důkazu matematickou indukcí dokažme vztah:

$$1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (P(n))$$

kde n je libovolné přirozené číslo.

Důkaz. a) Základní krok je ověření, že pro $n = 1$ tvrzení $P(1)$ platí.

$$P(1) : \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Tvrzení $P(1)$ tedy platí.

b) (Obecný krok indukce) Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dokažme, že pak platí i pro $n + 1$. Předpokládejme tedy, že platí $P(n)$, tj.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pak ukažme, že platí $P(n+1)$, tj.

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

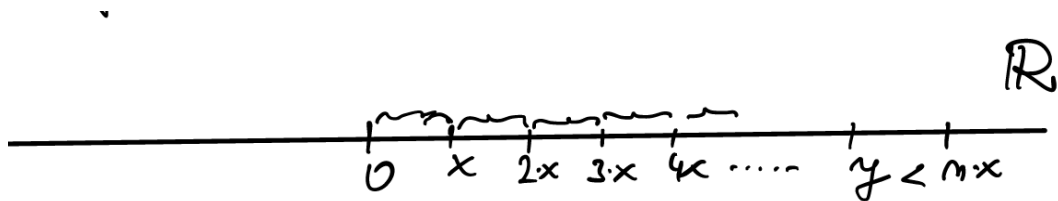
Pokud upravíme s využitím indukčního předpokladu $P(n)$ levou stranu dokazované rovnosti, dostaneme:

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) \\
 &= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} \\
 &= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \\
 &= \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)}{2}
 \end{aligned}$$

Tedy platí $P(n+1)$ v důsledku indukčního předpokladu $P(n)$. Tvrzení $P(n)$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Důkaz je hotov. $\square$

Archimedova vlastnost

Věta. Pro všechna $y \in \mathbb{R}$ a pro každé kladné reálné číslo x existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $y < n \cdot x$.



Důsledek. Neexistuje reálné číslo x takové, že pro všechna přirozená čísla n by platilo $x > n$.

Definice. Uvažujme neprázdnou množinu $A \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že A je **shora omezenou množinou**, pokud existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že $a \leq h$ pro každé $a \in A$. Číslo h nazýváme **horní mezí** množiny A . Řekneme, že A je **shora neomezená množina**, pokud pro každé $h \in \mathbb{R}$ existuje $a \in A$ takové, že $a > h$.

Poznámka. Předchozí důsledek Archimedovy vlastnosti je vlastně ekvivalentní s tím, že $\mathbb{N}$ není shora omezená v $\mathbb{R}$.

Věta (O hustotě rozložení množiny rac. čísel na reálné ose) Množina racionálních čísel je hustě rozložena na reálné ose. To znamená, že pro každá dvě reálná čísla a a b taková, že $a < b$, existuje racionální číslo r takové, že $a < r < b$.

Důkaz. V důsledku Archimedovy vlastnosti reálných čísel existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $1 < (b - a)n_0$. Odtud plyne, že

$$\frac{1}{n_0} < b - a.$$

Dále opět v důsledku Archimedovy vlastnosti reálných čísel existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $a < m \cdot \frac{1}{n_0}$.

V důsledku toho, že $\mathbb{N}$ je dobře uspořádaná množina, existuje nejmenší $m \in \mathbb{N}$ takové, že $a < m \cdot \frac{1}{n_0}$. Označme toto přirozené číslo m jako m_0 . Pak platí

$$(m_0 - 1) \cdot \frac{1}{n_0} \leq a < m_0 \cdot \frac{1}{n_0}.$$

Nyní položme $r = \frac{m_0}{n_0}$. Z poslední soustavy nerovností plyne jednak, že $a < r$ a

$$r - a \leq \frac{1}{n_0} < b - a.$$

Z předchozího plyne, že pro $r = \frac{m_0}{n_0}$ platí $a < r < b$ a $r \in \mathbb{Q}$. Věta je dokázána. $\square$

Axiom o existenci supréma

Definice horní hranice množiny. Necht' $A \subset \mathbb{R}$ a $h \in \mathbb{R}$ splňuje podmínku:

$$\forall a \in A : a \leq h.$$

Potom číslo h nazveme **horní hranicí množiny A** .

Věta (axiom o existenci supréma - axiom o úplnosti): Každá neprázdná shora omezená množina A reálných čísel má supremum. Tato věta vlastně říká, že množina

$$H = \{h \in \mathbb{R} : h \text{ je horní mezí množiny } A\}$$

má nejmenší prvek, který se nazývá **supremum množiny A** a značí se $\sup A$.

Věta (Existence $\sqrt{2}$) $\forall \mathbb{R}$ existuje právě jedno x takové, že $x > 0$, $x^2 = 2$.

Důkaz. Uvažujme množinu $A = \{y \in \mathbb{R} : y > 0 \wedge y^2 < 2\}$. Zřejmě $A \neq \emptyset$ neboť $1 \in A$ a množina A je shora omezená, například číslem $h = 2$. Z Axiomu o existenci suprema má tedy množina A supremum, označme jej s . Ukažme nyní, že $s^2 = 2$. Nyní připustíme, že $2 < s^2$.

Pak lze nalézt $\varepsilon > 0$ takové, že $0 < s - \varepsilon$ a

$$2 < (s - \varepsilon)^2.$$

Z definice supréma pak vyplývá existence čísla $x > 0$ takového, že $x^2 < 2$ a současně $0 < s - \varepsilon < x$. Odtud plyne $(s - \varepsilon)^2 < x^2 < 2$, což je spor s tím, že $2 < (s - \varepsilon)^2$.

Dokázali jsme tedy, že $s^2 \leq 2$. Připustíme, že $s^2 < 2$. Pak lze dokázat existenci $\varepsilon > 0$ takového, že $(s + \varepsilon)^2 < 2$.

To je ale ve sporu s tím, že s je nejmenší horní mezí množiny A . Tedy $s^2 = 2$. Zbývá ještě dokázat jednoznačnost.

Necht' $s' > 0$ je takové, že $s'^2 = 2$. Pak

$$0 = s^2 - s'^2 = (s - s')(s + s') \implies s = s'.$$

$\square$

Příklad. Uvažujme neprázdnou množinu

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}.$$

Zřejmě $A \subseteq \mathbb{Q}$. Dále zřejmě existuje horní mez $h \in \mathbb{Q}$ množiny A , neboli A je v $\mathbb{Q}$ shora omezená. Např. číslo $h = 2$ je horní mezí množiny A .

Nyní si položíme otázku, zdali existuje nejmenší prvek h_0 neprázdné množiny

$$H = \{h \in \mathbb{Q} : h \text{ je horní mezí množiny } A\}.$$

Takový prvek h_0 by musel splňovat podmínku: $h_0 > \sqrt{2}$ a $h_0 \leq h$ pro každé $h \in H$.

Nicméně pak existuje $r \in \mathbb{Q}$ takové, že $\sqrt{2} < r < h_0$. Pak ale číslo r je horní mezí množiny A , což je spor s tím, že h_0 je nejmenší horní mezí množiny A . Odtud vyplývá, že množina A nemá v množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$ supremum. Tedy množina $\mathbb{Q}$ není úplná. $\square$

Příklad 1. Spočítejme supremum množiny $(-\infty, 0)$.

Řešení. Označme $A = (-\infty, 0)$. Hledáme $\sup A$. Množina horních mezí množiny A je $H = \{h \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : a \leq h\}$. Pro každé $a \in A$ platí $a < 0$, tedy také $a \leq 0$. Číslo 0 je tedy horní mezí množiny A . Každé číslo $h' > 0$ je také horní mezí. Naopak, žádné číslo $h < 0$ není horní mezí, protože pro takové h můžeme najít $a \in A$ (například $a = h/2$) takové, že $a > h$. Množina všech horních mezí je tedy interval $[0, \infty)$. Supremum je nejmenší horní mez, tedy nejmenší prvek množiny $[0, \infty)$. Tímto prvkem je číslo 0. Platí tedy

$$\sup(-\infty, 0) = 0.$$

$\square$