

Průběh funkce

Věta (test monotónnosti). (a) Jestliže $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, potom je funkce f na intervalu (a, b) rostoucí funkcí.

(b) Jestliže $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, potom je funkce f na intervalu (a, b) klesající funkcí.

Důkaz. Dokažme část (a). Část (b) se dokáže podobně. Zvolme libovolně dva body $x_1, x_2 \in (a, b)$ a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_1 < x_2$. Vzhledem k definici rostoucí funkce musíme dokázat, že $f(x_1) < f(x_2)$. Neboť podle předpokladu je funkce diferencovatelná na intervalu (a, b) , splňuje funkce f předpoklady Lagrangeovy věty o střední hodnotě na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$. Existuje tedy $c \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ tak, že platí:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Podle předpokladu je $f'(c) > 0$ a $x_2 - x_1 > 0$. Tudíž

$f(x_2) - f(x_1) > 0 \iff f(x_1) < f(x_2)$. To dokazuje, že funkce f je rostoucí funkcí na intervalu (a, b) . $\square$

Příklad. Najděte intervaly, kde je funkce $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ rostoucí resp. klesající.

Řešení.

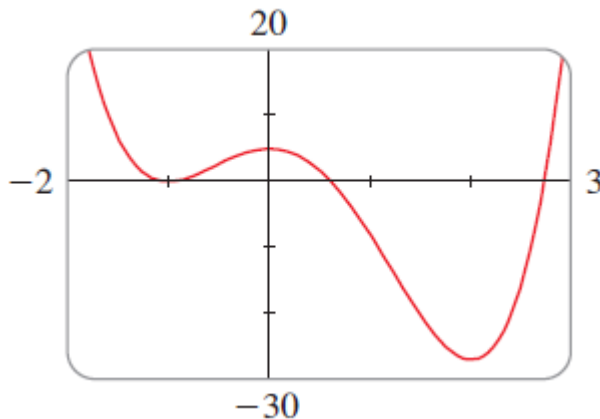
$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1).$$

Najdeme nulové body derivace, tj. kořeny rovnice $f'(x) = 0$. Jsou to body: $x = 0, 2, -1$. Tyto body nám rozdělí reálnou osu na čtyři intervaly.



Na každém z těchto intervalů má derivace buď stále kladné nebo stále záporné znaménko.

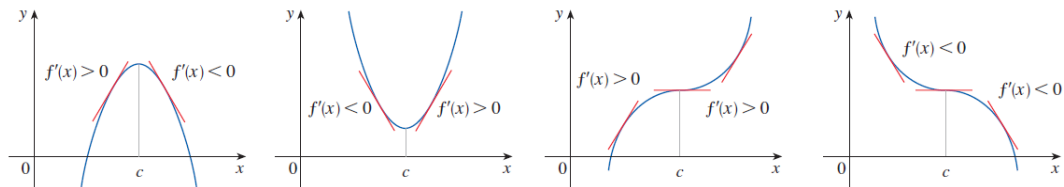
Interval	$12x$	$x - 2$	$x + 1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	—	—	—	—	klesající na $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	—	—	+	+	rostoucí na $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	+	—	+	—	klesající na $(0, 2)$
$x > 2$	+	+	+	+	rostoucí na $(2, \infty)$



Test existence lok. extrému

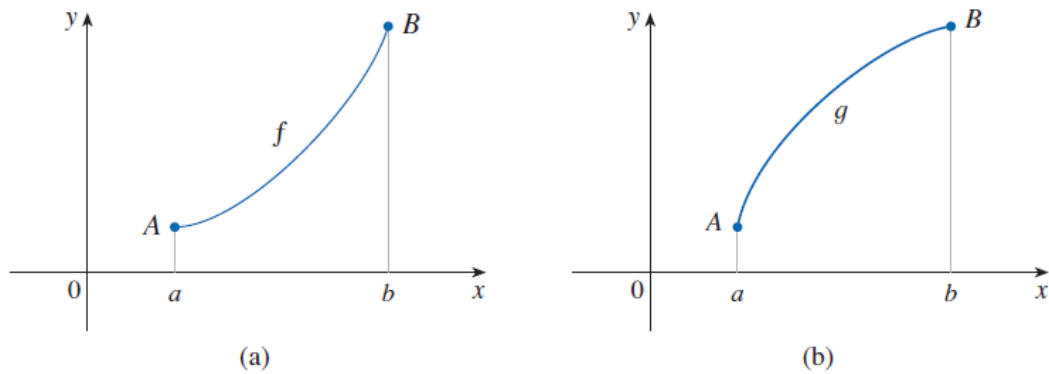
Věta. Předpokládejme, že c stacionárním bodem spojitě funkce f .

- (a) Jestliže f' mění své znaménko v bodě c z kladného na záporné, potom funkce f nabývá v bodě c lokální maximum.
- (b) Jestliže f' mění své znaménko v bodě c ze záporného na kladné, potom funkce f nabývá v bodě c lokální minimum.
- (c) Jestliže má derivace f' stejné znaménko vlevo i vpravo od bodu c , potom funkce f nenabývá v bodě lokální extrém.



Příklad. Uvažujme opět funkci $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$. Najděme lokální extrémy této funkce s využitím předchozí věty. Z řešení předchozího příkladu vyplývá, že derivace f' mění svoje znaménko ze záporného na kladné při přechodu přes stacionární bod $x = -1$. Tudíž $f(-1) = 0$ je lokálním minimem funkce f . Dále derivace f' mění svoje znaménko z kladného na záporné při přechodu přes bod $x = 0$ a tudíž $f(0) = 5$ je lokálním maximem funkce f . Konečně derivace f' mění svoje znaménko ze záporného na kladné při přechodu přes bod $x = 2$ a tudíž $f(2) = -27$ je lokálním minimem funkce f .

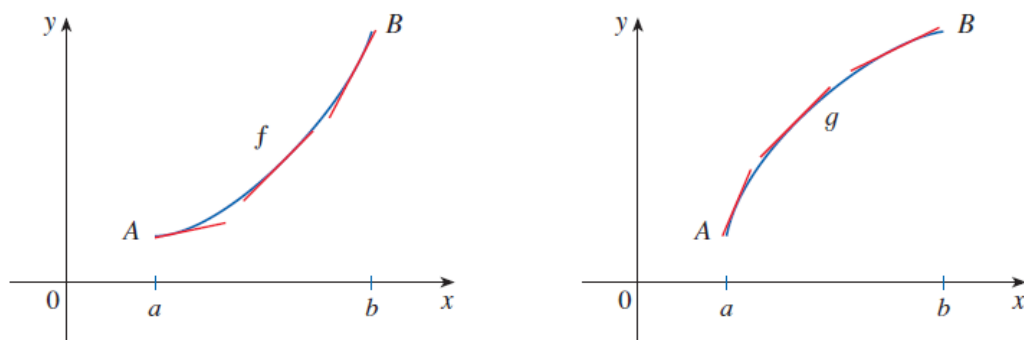
Konvexita a konkávnost funkce na intervalu



Definice. Předpokládejme, že funkce $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelnou funkcí.

(a) Řekneme, že funkce f je na intervalu (a, b) **konvexní**, jestliže graf funkce f leží nad libovolnou tečnou ke grafu funkce s bodem dotyku $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$.

(b) Řekneme, že funkce f je na intervalu (a, b) **konkávní**, jestliže graf funkce f leží pod libovolnou tečnou ke grafu funkce s bodem dotyku $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$.



Věta (test konvexity/konkávnosti). (a) Jestliže platí $f''(x) > 0$ na intervalu (a, b) , potom je funkce f na intervalu (a, b) konvexní.

(b) Jestliže platí $f''(x) < 0$ na intervalu (a, b) , potom je funkce f na intervalu (a, b) konkávní.

```
In [2]: # Nakresleme si graf funkce y = x^3

import numpy as np

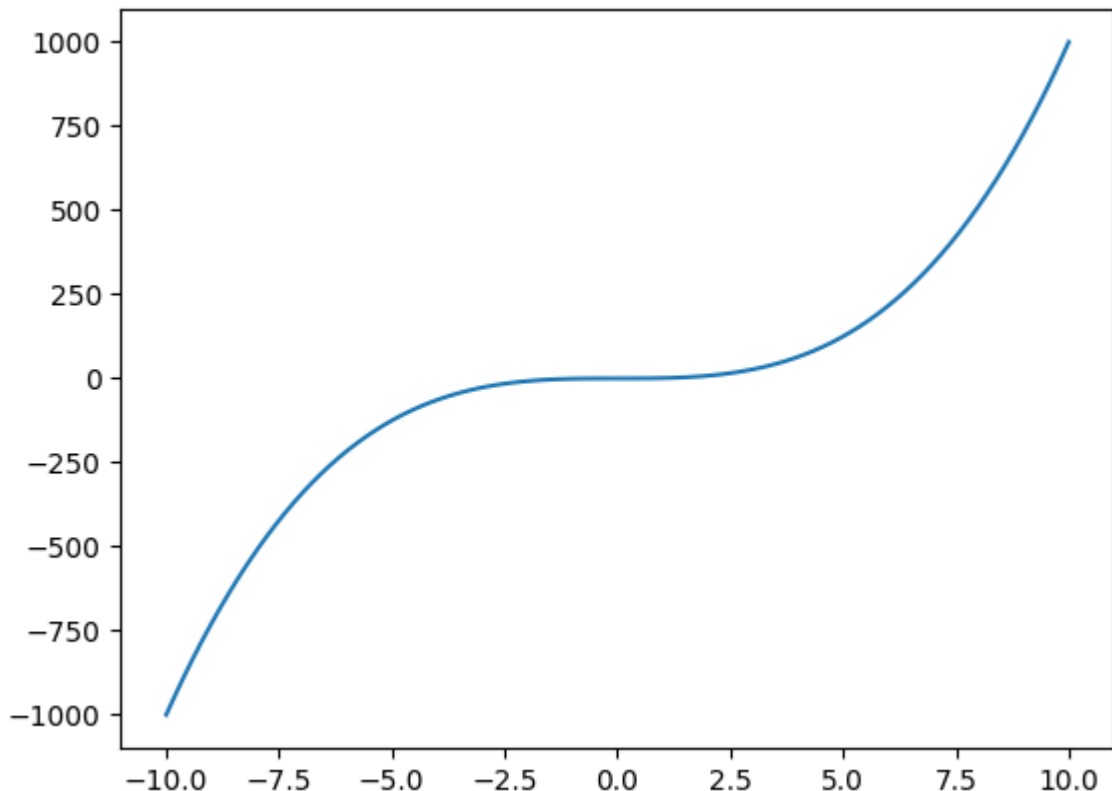
import matplotlib.pyplot as plt

# Vytvorime si pole hodnot x od -10 do 10
x = np.linspace(-10, 10, 100)

# Vypocitame si hodnoty y
y = x**3

# Nakreslime graf
plt.plot(x, y)
```

```
# Zobrazíme graf
plt.show()
```



Definice. Bod P ležící grafu funkce $y = f(x)$ se nazývá **inflexním bodem**, je-li zde funkce f spojitá a funkce f mění svůj charakter při přechodu přes bod P z konvexity na konkávnost nebo naopak.

Test existence lok. extrémů pomocí druhé derivace

Věta. Předpokládejme, že funkce f má na okolí bodu c spojitou druhou derivaci f'' .

- (a) Jestliže $f'(c) = 0$ a $f''(c) > 0$, potom funkce f nabývá lokální minimum v bodě c .
- (b) Jestliže $f'(c) = 0$ a $f''(c) < 0$, potom funkce f nabývá lokální maximum v bodě c .

Příklad. Uvažujme funkci $y = x^4 - 4x^3$ a vyšetřeme intervaly konvexity/konkávnosti, inflexní body a lokální extrémy této funkce.

Řešení. Je-li $f(x) = x^4 - 4x^3$, potom

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

a

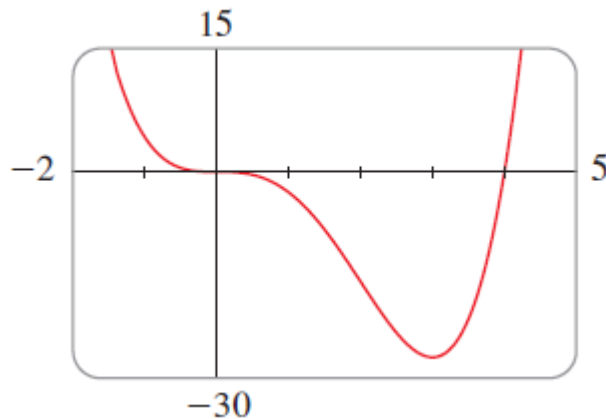
$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

Řešme nejdříve rovnici $f'(x) = 0$, abychom našli stacionární body funkce. Řešením jsou body $x = 0$ a $x = 3$. Dále vyčíslíme druhou derivaci ve stacionárních bodech:

$$f''(0) = 0, \quad f''(3) = 36 > 0.$$

Jelikož $f'(3) = 0$ a $f''(3) > 0$ plyne odsud podle kritéria, že $f(3) = -27$ je lokálním minimem. Dále $f''(0) = 0$ nedává žádnou informaci o existenci lokálního extrému. Protože $f'(x) < 0$ pro $x < 0$ a také pro $0 < x < 3$. Tedy podle kritéria s využitím první derivace lze říci, že funkce f nenabývá lokální extrém v bodě $x = 0$.

Dále $f''(x) = 0$ pro $x = 0$ nebo $x = 2$. $f''(x) > 0$ na $(-\infty, 0)$ a $(2, \infty)$. $f''(x) < 0$ na intervalu $(0, 2)$. Z toho vyplývá, že funkce f je konvexní na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(2, \infty)$ a je konkávní na intervalu $(0, 2)$.



Definice (asymptota se směrnicí), Necht' $f : (K, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Potom řekneme, že přímka $y = kx + q$ je **asymptotou funkce f pro $x \rightarrow +\infty$** , platí-li

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0.$$

Analogicky definujeme asymptotu pro $x \rightarrow -\infty$.

Věta. Přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f pro $x \rightarrow \pm\infty$, právě tehdy když platí

$$(a) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}.$$

Příklad. Užitím první a druhé derivace vyšetřeme průběh funkce včetně tzv. asymptot grafu funkce $f(x) = e^{1/x}$.

Řešení.

1. Definičním oborem je množina $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Ověřme existenci tzv. vertikálních asymptot pro $x \rightarrow 0 \pm$. Jestliže $x \rightarrow 0+$, pak $t = 1/x \rightarrow \infty$. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0+} e^{1/x} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t = \infty.$$

Z toho plyne, že přímka o rovnici $x = 0$ vertikální asymptotou ke grafu funkce pro $x \rightarrow 0+$. Dále pokud $x \rightarrow 0-$, pak $t = 1/x \rightarrow -\infty$. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0-} e^{1/x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$$

Tedy přímka $x = 0$ není vertikální asymptotou pro $x \rightarrow 0-$. 3. Jestliže $x \rightarrow \pm\infty$, potom je $1/x \rightarrow 0$ a tudíž

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

Odtud vyplývá, že $y = 1$ je horizontální asymptotou funkce f pro $x \rightarrow \pm\infty$. 4.

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}.$$

Odtud plyne, že pro každé $x \neq 0$ je $f'(x) < 0$. Odtud plyne, že funkce je klesající na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. 5. Funkce nemá žádné stacionární body a tedy nemá lokální extrémy. 6.

$$f''(x) = \frac{e^{1/x}(2x + 1)}{x^4}.$$

Odtud plyne, že $f''(x) > 0$ pro každé $x > -\frac{1}{2}$ a $f''(x) < 0$ pro každé $x < -\frac{1}{2}$. To znamená, že funkce f je konvexní na intervalech $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \infty)$ a je konkávní na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{2})$. Bod $(-\frac{1}{2}, e^{-2})$ je inflexním bodem grafu.

