

Neurčité výrazy a l'Hospitalovo pravidlo

Neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Věta. Předpokládejme, že funkce f a g jsou diferencovatelné a $g'(x) \neq 0$ na otevřeném intervalu I obsahujícího bod a (připouštíme možnost $g'(a) = 0$). Dále předpokládejme, že

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{a zároveň} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

nebo že

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \text{a zároveň} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

jestliže limita na pravé straně existuje (případně je nevlastní).

Poznámka. l'Hospitalovo pravidlo platí pro jednostranné limity i pro limity v nevlastních bodech, tj. pro $x \rightarrow a+$, $x \rightarrow a-$, $x \rightarrow \infty$ nebo $x \rightarrow -\infty$.

Příklad. Vypočítejme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}.$$

Řešení.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln 1 = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0.$$

Tedy limita vede na neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$, tedy můžeme aplikovat l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1.$$

Příklad. Vypočítejme limitu

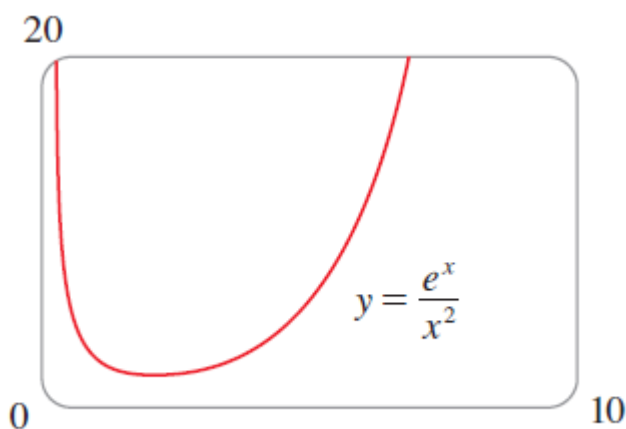
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Řešení. Platí $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$. Tedy limita vede na neurčitý výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$. Použitím l'Hospitalova pravidla dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x}.$$

Zde opět platí $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty$. Opětovnou aplikací l'Hospitalova pravidla dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$



Neurčité výrazy typu $0 \cdot \infty$

Příklad. Vypočítejme limitu $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x$.

Řešení. Uvedená limita vede na neurčitý výraz protože $\lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$ a $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty$. Užitím l'Hospitalova pravidla dostaneme:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0.$$

Neurčité výrazy typu $(\infty - \infty)$

Pokud budeme předpokládat, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, potom limita

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$$

vede k neurčitému výrazu typu $\infty - \infty$.

Příklad. Počítejme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

Řešení. Zde $1/(\ln x) \rightarrow \infty$ a $1/(x-1) \rightarrow \infty$ jestliže $x \rightarrow 1+$. Tedy uvedená limita je typu $\infty - \infty$. Limitu upravme takto

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}.$$

Limita v tomto tvaru vede na neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$. Aplikací l'Hospitalova pravidla dostáváme:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-\frac{1}{x}}{(x-1) \cdot \frac{1}{x} + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1+x\ln x}.$$

Poslední limita opět vede na neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ a tudíž aplikujme opět l'Hospitalovo pravidlo podruhé:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1+x\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1+x \cdot \frac{1}{x} + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2+\ln x} = \frac{1}{2}.$$

Neurčité výrazy typu $(0^0, \infty^0, 1^\infty)$

Pokud počítáme limitu

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, dostáváme limitu typu: 0^0 ,
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, dostáváme limitu typu: ∞^0 ,
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, dostáváme limitu typu: 1^∞ .

Postup při výpočtu limity:

1. Položíme $y = [f(x)]^{g(x)}$.
2. Logaritmuje obě strany rovnosti a dostaneme rovnost $\ln y = g(x) \ln(f(x))$.
3. Poté spočteme limitu $L = \lim_{x \rightarrow a} \ln y = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln(f(x))$.
4. Výsledná limita je rovna:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln y} = e^L.$$

Příklad. Vypočítejme limitu: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

Řešení. Limita zřejmě vede na neurčitý výraz typu: 0^0 .

1. Položme $y = x^x$.
2. $\ln y = x \ln x$.
- 3.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ (viz příklad výše uvedený)}.$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln y} = e^0 = 1.$$

Obrázek grafu uvádím níže.

