

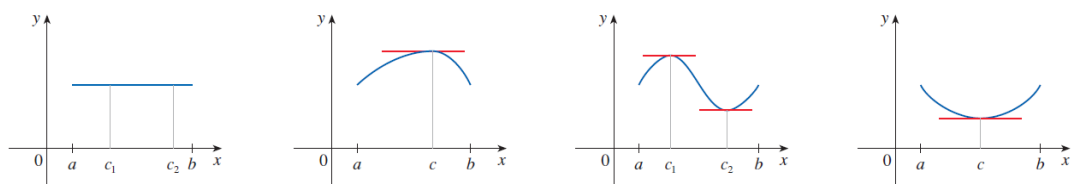
Věty o střední hodnotě

Rolleova věta

Věta (Michel Rolle, 1691). Předpokládejme, že funkce f splňuje následující tři podmínky:

1. f je spojitou funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$.
2. Funkce f je diferencovatelnou funkcí na intervalu (a, b) .
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f'(c) = 0$.



Důkaz.

Případ 1. Necht' je funkce f konstantní, tj. pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ je $f(x) = k$, kde k je konstanta. Potom je pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ $f'(x) = 0$. Tedy bod c lze volit libovolně v intervalu (a, b) .

Případ 2. Necht' existuje $x \in (a, b)$ takové, že $f(x) > f(a)$. Potom podle Weierstrassovy věty musí funkce f nabývat v jistém bodě $c \in (a, b)$ svého absolutního maxima neboť $f(a) = f(b)$. Odtud plyne, že $f(c)$ je též lokálním maximum funkce a tudíž $f'(c) = 0$ díky Fermatově větě.

Případ 3. Předpokládejme, že existuje $x \in (a, b)$ takové, že $f(x) < f(a)$. Opět podobně jako v případě 2 díky Weierstrassově větě funkce nabývá v jistém bodě $c \in (a, b)$ své absolutní minimum a tudíž je funkční hodnota $f(c)$ též lokálním minimem funkce f . Z Fermatovy věty následně plyne, že $f'(c) = 0$. $\square$

Lagrangeova věta o střední hodnotě

Věta (Joseph-Louis Lagrange). Předpokládejme, že funkce f splňuje následující dvě podmínky:

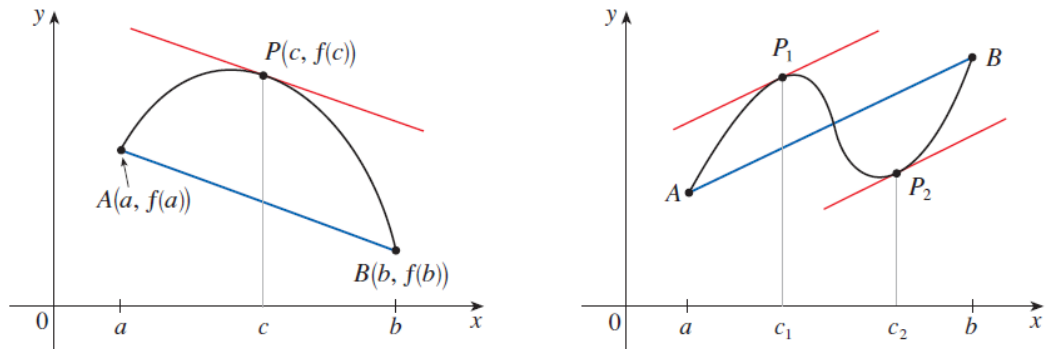
1. f je spojitou funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$.
2. f je diferencovatelnou funkcí v otevřeném intervalu (a, b) .

Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

nebo ekvivalentně

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



Důkaz. Uvažujme nejdříve funkci, jejíž grafem je přímka obsahující úsečku AB spojující body $A(a, f(a))$ a $B(b, f(b))$ ležící na grafu funkce jak vidíte na obrázku nahoře vlevo. Rovnice této přímky se dá zapsat takto

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

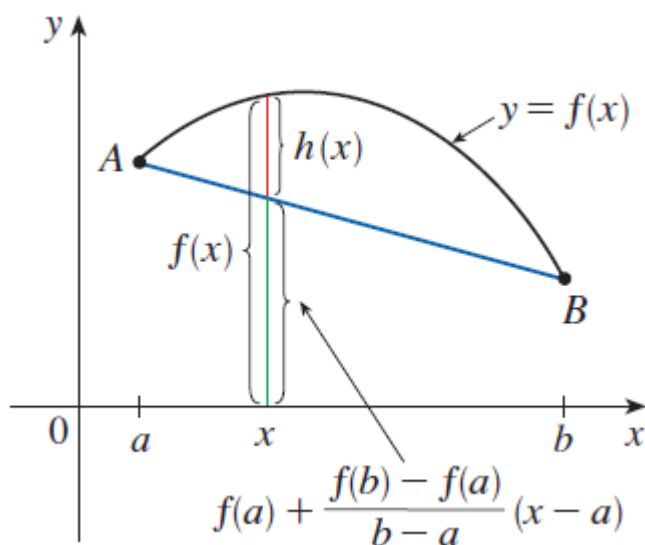
neboli

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Dále uvažujme pomocnou funkci $h(x)$ danou předpisem

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Viz následující obrázek:



Nyní lze snadno ověřit, že tato funkce h vyhovuje předpokladům tzv. Rolleovy věty:

1. Funkce h je na intervalu $\langle a, b \rangle$ sojitou funkcí neboť je součtem funkce f a lineárního polynomu.
2. Pro každé $x \in (a, b)$ existuje derivace:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3.

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0, \\ h(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0. \end{aligned}$$

Tudíž $h(a) = h(b)$.

Z Rolleovy věty plyne existence bodu $c \in (a, b)$ takového, že

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Odtud již plyne vztah

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta. Jestliže $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, potom je funkce f konstantní na intervalu (a, b) .

Důkaz. Zvolme libovolně dva body $x_1, x_2 \in (a, b)$ tak, že $x_1 < x_2$. Z předpokladů věty vyplývá, že funkce f splňuje na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ předpoklady Lagrangeovy věty o střední hodnotě a tudíž existuje bod $c \in (x_1, x_2)$ tak, že platí:

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2). \quad (1)$$

Neboť podle předpokladu věty platí pro všechna x $f'(x) = 0$, platí nutně $f'(c) = 0$. Nyní s ohledem na vztah (1) dostáváme:

$$f(x_1) - f(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Takto jsme dokázali, že funkce f nabývá v libovolných dvou bodech x_1 a x_2 stejnou funkční hodnotu a je tudíž konstantní funkcí na intervalu (a, b) .

Důsledek. Jestliže platí pro dvě funkce f a g , že $f'(x) = g'(x)$ na intervalu (a, b) , potom platí

$$f(x) = g(x) + k, \forall x \in (a, b).$$

kde k je konstanta.

Důkaz. Položme pro každé $x \in (a, b)$, $F(x) = f(x) - g(x)$. Potom podle předpokladu platí:

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

pro každé $x \in (a, b)$. Podle předchozí věty je tedy funkce F konstantní, tj. existuje konstanta $k \in \mathbb{R}$ taková, že $F(x) = k$ pro každé $x \in (a, b)$, tj. $f(x) - g(x) = k$ pro každé $x \in (a, b)$ což jsme chtěli dokázat. $\square$