

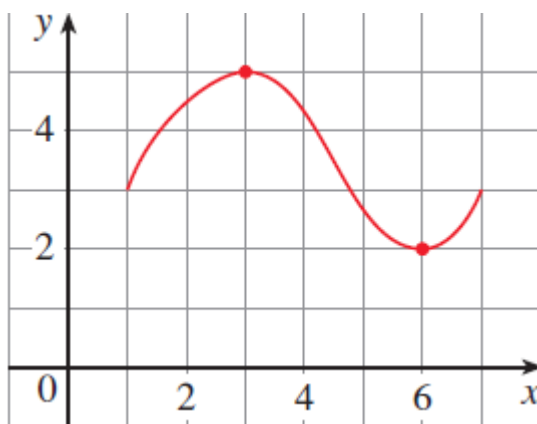
Globální (absolutní) a lokální extrémy funkcí

Definice a existence extrémů

Definice. Necht' $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ a $c \in D$. Potom řekneme, že $f(c)$ je

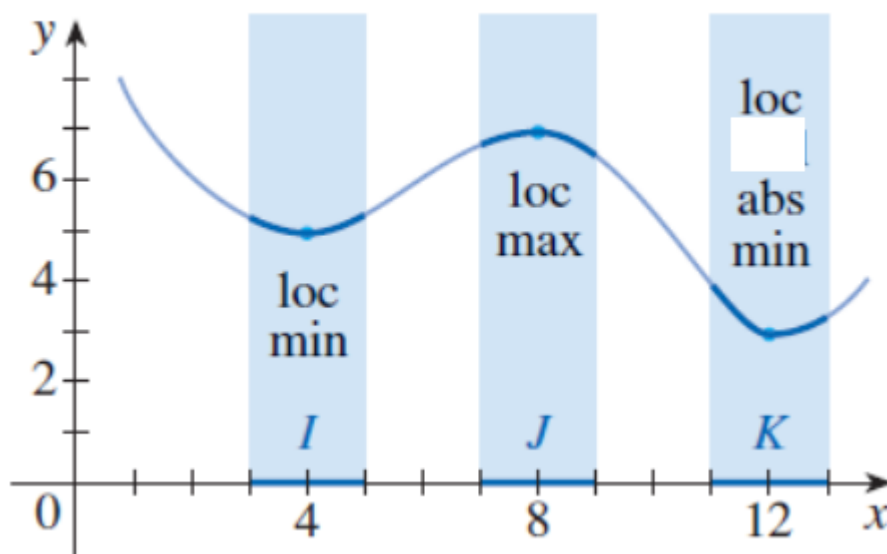
1. **globálním (absolutním) maximem** funkce f na množině D , jestliže $f(c) \geq f(x)$ pro všechna $x \in D$,
2. **globálním (absolutním) minimem** funkce f na množině D , jestliže $f(c) \leq f(x)$ pro všechna $x \in D$.

In []:



Definice. Necht' $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ a $c \in D$. Potom řekneme, že $f(c)$ je

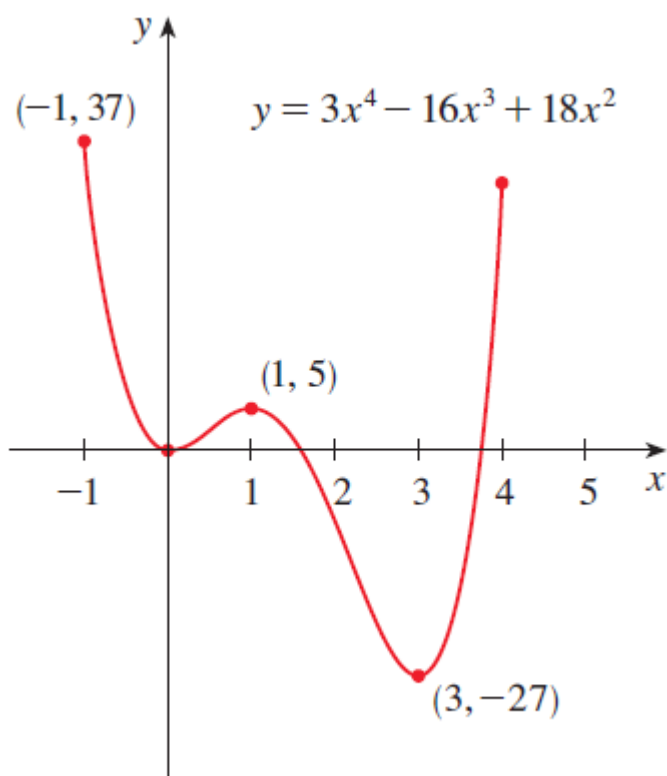
1. **lokálním maximem** funkce f , jestliže existuje otevřený interval I takový, že $c \in I$ a pro každé $x \in I$ platí $f(c) \geq f(x)$,
2. **lokálním minimem** funkce f , jestliže existuje otevřený interval I takový, že $c \in I$ a pro každé $x \in I$ platí $f(c) \leq f(x)$.



Příklad. Uvažujme funkci

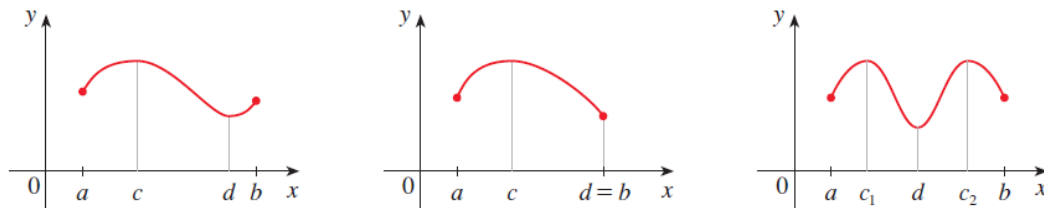
$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2, \quad x \in \langle -1, 4 \rangle.$$

Odečtěme z grafu lokální minima a maxima funkce.

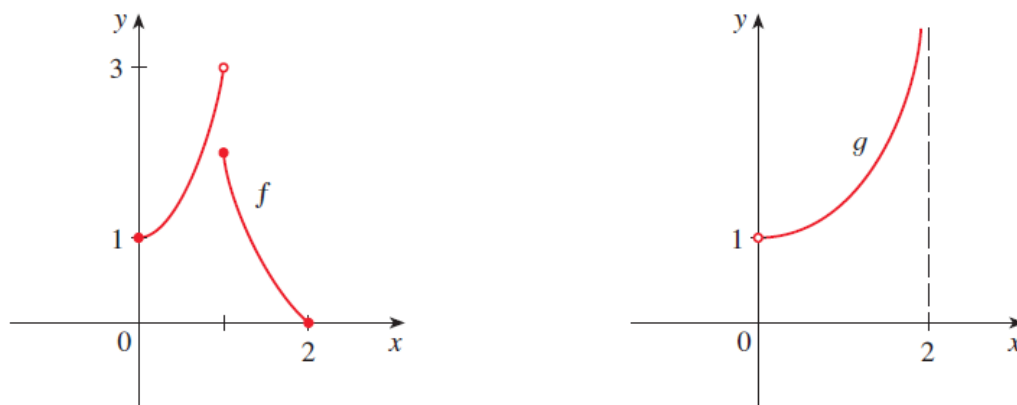


Funkční hodnota $f(1) = 5$ je lokálním maximem a $f(-1) = 37$ absolutním maximem, které není lokálním maximem neboť se nabývá na krajním bodě def. oboru. Dále $f(0) = 0$ je lokálním minimem a $f(3) = -27$ je jak absolutní, tak lokální minimum. Konečně funkce f nenabývá v bodě $x = 4$ ani absolutní ani lokální extrém.

Věta (Weierstrass). Předpokládejme, že funkce f je spojitou funkcí na omezeném a uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom funkce f nabývá absolutní maximum $f(c)$ a absolutní minimum $f(d)$ v jistých bodech $c, d \in \langle a, b \rangle$.



Na obrázcích nahoře vidíme tři příklady spojitých funkcí, které nabývají absolutní extrémy. Všimněte si, že funkce může nabývat absolutní maximum resp. minimum ve vícero bodech. Na obrázcích dole vidíme, že pokud nejsou splněny předpoklady věty, nemusí funkce nabývat absolutní extrémy.



Než přistoupíme k důkazu této významné věty, připomeňme tvrzení tzv. Bolzano-Weierstrassovy věty.

Věta. Z každé omezené reálné posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Důkaz Weierstrassovy věty. Dokažme existenci bodu $c \in \langle a, b \rangle$ takového, že $f(c) = \max\{f(x) : x \in \langle a, b \rangle\}$. Ukažme, že spojitosti funkce f plyne její omezenost shora na intervalu $\langle a, b \rangle$. To znamená, že existuje reálná čísla $\beta \in \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ platí:

$$f(x) \leq \beta.$$

Pokud horní mez všech funkčních hodnot neexistovala, potom by pro každé $n \in \mathbb{N}$ existoval bod $x_n \in \langle a, b \rangle$ takový, že $n \leq f(x_n)$. Odtud by plynulo, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$. Na druhé straně existuje vybraná konvergentní posloupnost $x_{n_k} \rightarrow x^* \in \langle a, b \rangle$. Odtud pak dostáváme s přihlédnutím ke spojitosti funkce f v bodě x^* , že

$$\mathbb{R} \ni f(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty,$$

což je spor.

Nyní položíme $f(\langle a, b \rangle) = \{f(x) : x \in \langle a, b \rangle\}$. Potom je $f(\langle a, b \rangle)$ neprázdná a shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Podle axiomu suprema existuje supremum $s = \sup f(\langle a, b \rangle)$. Z definice suprema vyplývá pro každé $n \in \mathbb{N}$ existence bodu $x_n \in \langle a, b \rangle$ tak, že platí:

$$s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s. \quad (1)$$

Uvažujme nyní posloupnost $X = (x_n)$ jejíž členy leží v omezeném a uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Podle Bolzano-Weierstrassovy věty existuje vybraná konvergentní podposloupnost $X' = (x_{n_k})$ konvergující k limitě $c \in \langle a, b \rangle$. Z podmínky (1) plyne pro každé $k \in \mathbb{N}$:

$$s - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq s.$$

Podle věty o sevření dostáváme $s = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k})$. Dále ze spojitosti funkce f v bodě c vyplývá

$$f(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = s = \sup f(\langle a, b \rangle).$$

Tedy $f(c)$ je absolutním maximem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Obdobným způsobem se dokáže existence bodu $d \in \langle a, b \rangle$ takového, že $f(d)$ je abs. minimem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$. $\square$

```
In [1]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Počet vnořených intervalů, které chceme zobrazit
n_intervals = 7

# Definujeme intervaly tak, že pro každé n:
#   a_n = 0.5 - 1/(n+2) a b_n = 0.5 + 1/(n+2)
# Tato volba zajišťuje, že:
#   - Intervaly jsou vnořené (a_n rostou, b_n klesají)
#   - Délka intervalu 2/(n+2) jde k nule, když n roste.
a = [0.5 - 1/(n+2) for n in range(n_intervals)]
b = [0.5 + 1/(n+2) for n in range(n_intervals)]

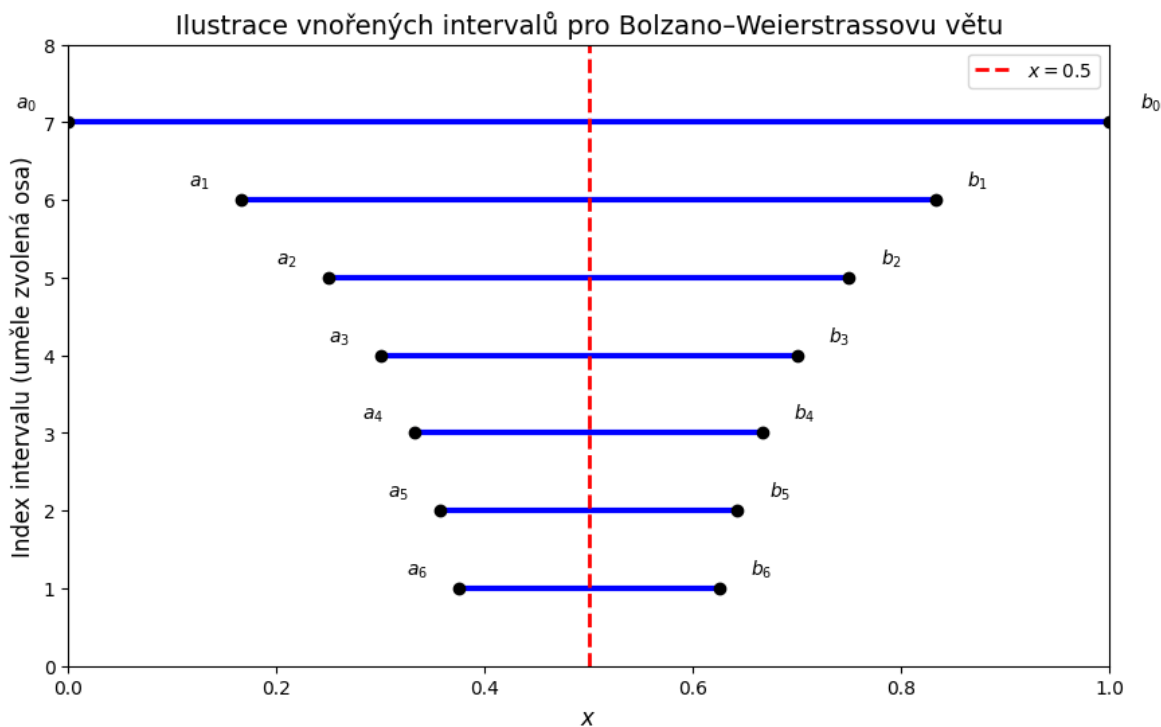
# Vytvoření grafu
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))

# Vykreslíme jednotlivé intervaly jako horizontální čáry na různých úrovních (y-
for i in range(n_intervals):
    # Pro lepší přehlednost vykreslíme intervaly odshora dolů
    y = n_intervals - i
    ax.hlines(y, a[i], b[i], color='blue', linewidth=3)
    # Označíme kraje intervalů
    ax.scatter([a[i], b[i]], [y, y], color='black', zorder=5)
    ax.text(a[i]-0.03, y+0.1, f'$a_{i}$', ha='right', va='bottom', fontsize=10)
    ax.text(b[i]+0.03, y+0.1, f'$b_{i}$', ha='left', va='bottom', fontsize=10)

# Označíme limitní bod x = 0.5, který leží ve všech intervalech
ax.axvline(0.5, color='red', linestyle='--', linewidth=2, label='$x=0.5$')
```

```
# Nastavení popisků os a titulku
ax.set_xlabel('$x$', fontsize=12)
ax.set_ylabel('Index intervalu (uměle zvolená osa)', fontsize=12)
ax.set_title('Ilustrace vnořených intervalů pro Bolzano-Weierstrassovu větu', fo
ax.set_xlim(0, 1)
ax.set_ylim(0, n_intervals+1)
ax.legend(loc='upper right')

plt.show()
```



Lokalizace extrémů

Definice. Stacionárním (kritickým) bodem funkce f budeme rozumět bod $c \in D_f$, kde buď platí $f'(c) = 0$ nebo derivace $f'(c)$ neexistuje.

Věta (Pierre Fermat (1601-1655)). Pokud funkce f nabývá lokální maximum nebo minimum v bodě c a existuje-li derivace $f'(c)$, potom $f'(c) = 0$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že například funkce f nabývá v bodě $c \in D_f$ lokální maximum. To znamená, že existuje otevřený interval $I \subseteq D_f$ takový, že $c \in I$ a pro každé $x \in I$ platí $f(c) \geq f(x)$. Je-li nyní $h > 0$ takové, že $c + h \in I$, potom je $f(c + h) - f(c) \leq 0$. Vydělení této nerovnosti kladným h dostaneme:

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Odtud plyne

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Tedy dokázali jsme, že $f'(c) \leq 0$. Opačnou nerovnost se dokáže analogicky. Je-li $h < 0$ takové, že $c + h \in I$, potom $f(c + h) - f(c) \leq 0$. Vydělením záporným h pak

dostaneme

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

Odtud plyne

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

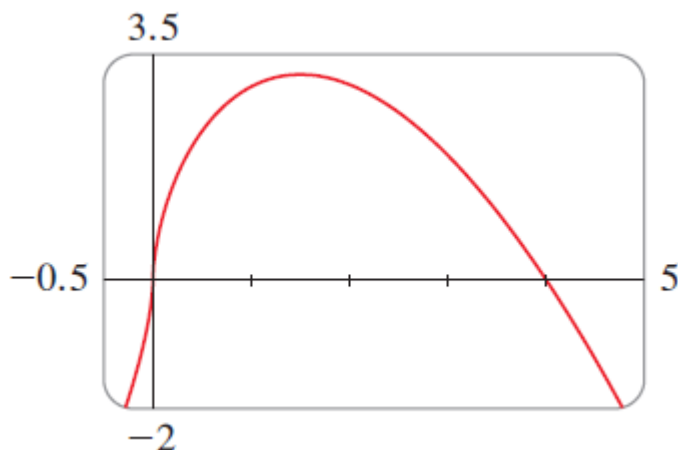
Dokázali jsme tedy, že $f'(c) \geq 0$. Z předchozího plyne $f'(c) = 0$ což jsme chtěli dokázat. $\square$

Příklad. Najděme stacionární body funkce $f(x) = x^{3/5}(4-x)$.

Řešení. $D_f = \mathbb{R}$. Pokud aplikujeme pravidlo pro derivaci součinu, dostaneme:

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4-x)\left(\frac{3}{5}x^{-2/5}\right) = \dots = \frac{12-8x}{5x^{2/5}}.$$

Odtud plyne, že $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. Dále funkce f nemá konečnou derivaci $f'(0)$. Tedy funkce f má dva stacionární body $x = 0$ a $x = 3/2$.



Nyní si můžeme shrnout postup při určení absolutních extrémů spojitě funkce

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$:

1. Najděme funkční hodnoty funkce f v každém stacionárním bodě v intervalu (a, b) .
2. Najděme funkční hodnoty $f(a)$ a $f(b)$.
3. Největší funkční hodnota nalezená v bodech 1. a 2. je absolutním maximem funkce a nejmenší z funkčních hodnot nalezených v bodech 1. a 2. je absolutním minimem funkce.

Příklad. Hledejme absolutní extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ na intervalu $\langle -\frac{1}{2}, 4 \rangle$.

Řešení. Vzhledem ke spojitosti funkce f lze použít výše zmíněný třibodový postup.

Uurčíme stacionární body uvnitř daného intervalu $\langle -\frac{1}{2}, 4 \rangle$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

Hledejme tedy kořeny rovnice $f'(x) = 0$. Kořeny této rovnice jsou $x = 0$ a $x = 2$. Tyto stacionární body leží v intervalu $(-\frac{1}{2}, 4)$. Funkční hodnoty jsou

$$f(0) = 1, \quad f(2) = -3.$$

Funkční hodnoty na koncích intervalu jsou

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}, \quad f(4) = 17.$$

Porovnáním těchto hodnot dojdeme k závěru, že funkční hodnota $f(4) = 17$ je absolutním maximem a funkční hodnota $f(2) = -3$ je absolutním minimem.

