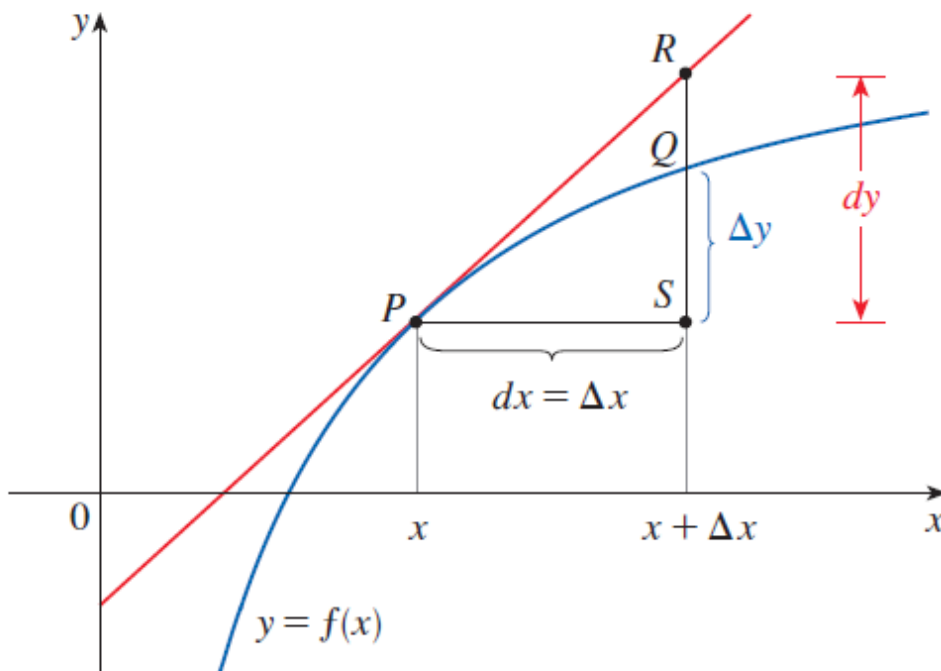


Diferenciál funkce

Uvažujme diferencovatelnou funkci $y = f(x)$. **Diferenciálem dx** budeme rozumět nezávislou proměnnou, to tedy znamená, že za dx můžeme dosadit libovolné reálné číslo. **Diferenciálem dy** budeme rozumět závislou proměnnou, určenou rovnicí

$$dy = f'(x)dx$$

Je-li x pevně daný bod, kde je funkce diferencovatelná, pak dy funkcí proměnné dx . Geometrický význam diferenciálů je ukázán na obrázku. Uvažujme dva body $P(x, f(x))$ a $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ na grafu funkce f a necht' $dx = \Delta x$. Veličinu Δx budeme interpretovat jako přírůstek nezávislé proměnné x a veličinu $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ jako přírůstek funkce f . Nyní platí, že orientovaná vzdálenost bodu S od bodu R je rovna $dy = f'(x)dx$. Veličinu dy budeme interpretovat jako přírůstek tečny.



Příklad. Provejme hodnoty veličin Δy a dy , je-li $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ a proměnná x se změní

- (a) z 2 na 2,05,
- (b) z 2 na 2,01.

Řešení. (a) Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 9, \\ f(2,05) &= 2,05^3 + 2,05^2 - 2 \cdot 2,05 + 1 = 9,717625 \\ \Delta y &= f(2,05) - f(2) = 0,717625. \end{aligned}$$

Dále obecně platí

$$dy = f'(x) \cdot dx = (3x^2 + 2x - 2) \cdot dx.$$

Jestliže je $x = 2$ a $dx = \Delta x = 0,05$, pak

$$dy = [3(2)^2 + 2 \cdot 2 - 2] \cdot 0,05 = 0,7.$$

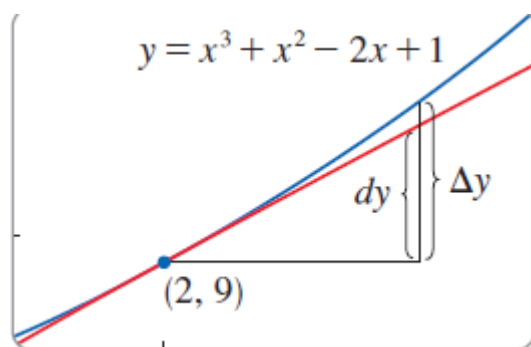
(b) Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} f(2,01) &= 2,01^3 + 2,01^2 - 2 \cdot 2,01 + 1 = 9,140701 \\ \Delta y &= f(2,01) - f(2) = 0,140701. \end{aligned}$$

Je-li $dx = \Delta x = 0,01$, pak

$$dy = [3(2)^2 + 2 \cdot 2 - 2] \cdot 0,01 = 0,14.$$

□



Všimněme si, že aproximace $\Delta y \approx dy$ je tím přesnější, čím menší je Δx .